

三维七对角差分格式强隐式法的推导计算

章 顺, 陈素琴, 黄自萍

(同济大学 应用数学系, 上海 200092)

摘要: 对三维情况下椭圆型方程的七对角差分格式的强隐式法作了推导, 给出了迭代格式, 并对收敛性和迭代参数的选择作了分析.

关键词: 强隐式法; 三维; 七对角差分格式; 迭代参数; 收敛性

中图分类号: O 175. 25

文献标识码: A

文章编号: 0253 - 374X(2001)07 - 0857 - 05

Deduction and Computation of Strongly Implicit Procedure Method for Seven - diagonal Finite Differentiate Method of 3 Dimensions

ZHANG Shun, CHEN Su - qin, HUANG Zi - ping

(Department of Applied Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: We deduce the strongly implicit procedure method for the seven - diagonal matrix which is obtained from the finite differentiate method of the elliptic equation in 3 dimensions, give the iterative formation, prove the convergence of the algorithm and analyze the choice of the iterative parameter.

Key words: strongly implicit procedure method; 3 dimensions; seven - diagonal finite; iterative parameter; convergence

用差分方法数值求解偏微分方程时, 所得到的线性代数方程组的系数矩阵常常是条件数很大的准对角矩阵, 对于此类多对角方程, 强隐式法 (strongly implicit procedure), 简称 SIP 方法, 被实践证明是一个行之有效的方法. 对于二维情况下, 椭圆型方程的五点、七点和九点差分格式的强隐式法, 文献 [1] 已作了详细的讨论. 对于三维情况下的格式, 计算实践中常采取把第三方向的项移到右边, 然后采用二维的强隐式分解来做. 作者考虑对三维情况下的七对角矩阵进行直接的强隐式分解, 然后进行迭代. 经过计算实践、比较, 发现这样做能大大地提高计算的速度. 本文给出了直接分解的公式, 并对此迭代格式的收敛性和迭代参数的选择进行了分析.

1 计算格式的推导

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f \frac{\partial u}{\partial z} + gu + h = 0 \quad (1)$$

为椭圆型方程, 用普通的七点格式求解, 问题化为求解 $A =$ 形式的线性代数方程组, 其中 A 为形状如图 1a 的一个七对角的方阵, 设其元素自左起分别为 $D_{i,j,k}, C_{i,j,k}, B_{i,j,k}, A_{i,j,k}, E_{i,j,k}, F_{i,j,k}, G_{i,j,k}$. 用强隐式法求解, 其思路是通过选取合适的矩阵 $M = LU$, 其中 L 和 U 分别是形如图 1b 的下三角矩阵和如图

收稿日期: 2000 - 09 - 30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19601028); 同济大学理科基金资助项目 (1300104003)

作者简介: 章 顺 (1977 -), 男, 浙江上虞人, 硕士生.

1c 的上三角矩阵. 每一矩阵在每一行上只有四个非零元素. 若 $M = LU$ 是对 A 很小的修正, 则如下的式 (2) 所用的格式称之为强隐式法.

$$M^{n+1} = (M - A)^n + \quad (2)$$

$$M\phi^{n+1} = (M - A)\phi^n + \Psi$$

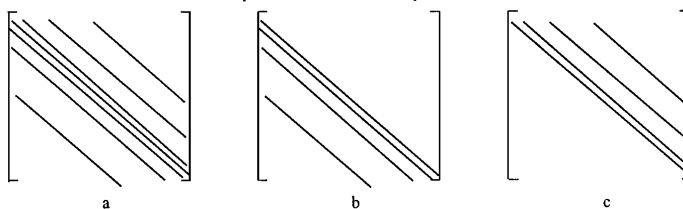


图 1 矩阵 A, L 和 U 的形状

Fig. 1 Forms of the matrixes A, L and U

下面导出 L 和 U . 分别设 L 和 U 每条线上元素自左到右分别为 $d_{i,j,k}$ 和 $1, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}$, 则 LU 为一个 13 对角矩阵, 若令 A 和 LU 的相应元素相等, 有

$$d_{i,j,k} = D_{i,j,k}, d_{i,j,k}e_{i,j,k-1} = 0, d_{i,j,k}f_{i,j,k-1} = 0, c_{i,j,k} = C_{i,j,k}, c_{i,j,k}e_{i,j-1,k} = 0, b_{i,j,k} = B_{i,j,k},$$

$$d_{i,j,k}g_{i,j,k} + c_{i,j,k}f_{i,j,k} + b_{i,j,k}e_{i,j-1,k} + a_{i,j,k} = A_{i,j,k}, a_{i,j,k}e_{i,j,k} = E_{i,j,k}, b_{i,j,k}f_{i-1,j,k} = 0,$$

$$a_{i,j,k}f_{i,j,k} = F_{i,j,k}, c_{i,j,k}g_{i,j-1,k} = 0, b_{i,j,k}g_{i-1,j,k} = 0, c_{i,j,k}g_{i,j,k} = G_{i,j,k} \quad (3)$$

这里约定在 A, L 里不出现的量, 如 B_{111} 等均设为 0. 可以看到未知量 (即 $a_{i,j,k}, b_{i,j,k}, c_{i,j,k}, d_{i,j,k}, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}$) 的个数刚好是系数矩阵 A 中 $A_{i,j,k}, B_{i,j,k}, C_{i,j,k}, D_{i,j,k}, E_{i,j,k}, F_{i,j,k}, G_{i,j,k}$ 的个数, 而式 (3) 中却多出右端为 0 的 6 个方程. 这是因为相乘得到的 LU 是 13 对角方阵而不是原来 A 的七对角方阵.

若将式 (3) 改写成

$$d_{i,j,k} = D_{i,j,k} + p_1, d_{i,j,k}e_{i,j,k-1} = p_2, d_{i,j,k}f_{i,j,k-1} = p_3, c_{i,j,k} = C_{i,j,k} + p_4, c_{i,j,k}e_{i,j-1,k} = p_5,$$

$$b_{i,j,k} = B_{i,j,k} + p_6, d_{i,j,k}g_{i,j,k} + c_{i,j,k}f_{i,j-1,k} + b_{i,j,k}e_{i-1,j,k} + a_{i,j,k} = A_{i,j,k} + p_7,$$

$$a_{i,j,k}e_{i,j,k} = E_{i,j,k} + p_8, b_{i,j,k}f_{i-1,j,k} = p_9, a_{i,j,k}f_{i,j,k} = F_{i,j,k} + p_{10}, c_{i,j,k}g_{i,j-1,k} = p_{11},$$

$$b_{i,j,k}g_{i-1,j,k} = p_{12}, c_{i,j,k}g_{i,j,k} = G_{i,j,k} + p_{13} \quad (4)$$

其中 p_1, \dots, p_{13} 为 6 个未知变量 $P_{i,j,k}, Q_{i,j,k}, R_{i,j,k}, S_{i,j,k}, T_{i,j,k}, U_{i,j,k}$ 的函数, 这 6 个未知量的引入是为了可以由式 (4) 的 13 个式子来求解 $a_{i,j,k}, b_{i,j,k}, c_{i,j,k}, d_{i,j,k}, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}$ 和 $P_{i,j,k}, Q_{i,j,k}, R_{i,j,k}, S_{i,j,k}, T_{i,j,k}, U_{i,j,k}$ 13 个未知数, 用其中 $a_{i,j,k}, b_{i,j,k}, c_{i,j,k}, d_{i,j,k}, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}$ 组成 L 和 U 矩阵, 使 L 和 U 的矩阵的乘积, 得出和原来七对角矩阵 A 近似的 13 对角矩阵.

式 (4) 中的 p_1, \dots, p_{13} 如下确定, 矩阵方程 $A =$ 写下来就是

$$D_{i,j,k} e_{i,j,k-1} + C_{i,j,k} e_{i,j-1,k} + B_{i,j,k} e_{i,j,k-1} + A_{i,j,k} e_{i,j,k} + E_{i,j,k} e_{i+1,j,k} +$$

$$F_{i,j,k} e_{i,j+1,k} + G_{i,j,k} e_{i,j,k+1} = e_{i,j,k} \quad (5)$$

若在式 (5) 中加入修正量 $e_{i+1,j-1,k}, e_{i-1,j+1,k}, e_{i,j+1,k-1}, e_{i,j-1,k+1}, e_{i+1,j,k-1}, e_{i-1,j,k+1}$, 得出 13 个未知数的方程, 组成的如图 2 的 13 对角阵与 A 近似相等.

将式 (5) 修正如下:

$$D_{i,j,k} e_{i,j,k-1} + C_{i,j,k} e_{i,j-1,k} + B_{i,j,k} e_{i,j,k-1} + A_{i,j,k} e_{i,j,k} + E_{i,j,k} e_{i+1,j,k} +$$

$$F_{i,j,k} e_{i,j+1,k} + G_{i,j,k} e_{i,j,k+1} + P_{i,j,k}q_1 + Q_{i,j,k}q_2 + R_{i,j,k}q_3 + S_{i,j,k}q_4 +$$

$$T_{i,j,k}q_5 + U_{i,j,k}q_6 = e_{i,j,k} \quad (6)$$

其中 q_1, \dots, q_6 是 $e_{i+1,j-1,k}, e_{i-1,j+1,k}, e_{i,j+1,k-1}, e_{i,j-1,k+1}, e_{i+1,j,k-1}, e_{i-1,j,k+1}$ 的线性函数, 为使 LU 尽可能和 A 相等, 由 Taylor 展

开式, 当离散微分方程的网络足够小时, 取

$$q_1 = e_{i+1,j-1,k} - (e_{i,j,k} + e_{i+1,j,k} + e_{i,j-1,k}) \quad (7a)$$

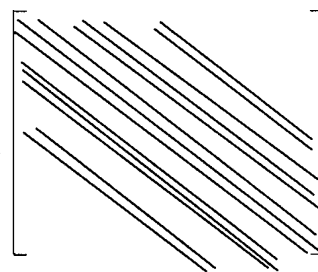


图 2 13 对角矩阵的形状

(7a) Fig. 2 Form of 13-diagonal matrix

则当 $\omega = 1$ 时, $q_1 = O(x^2 + y^2) = 0$, 参数 q_1 是考虑到截断误差而引入的, 其主要作用为调节收敛性和收敛误差. 类似地取

$$q_2 = a_{i-1,j+1,k} - (a_{i,j,k} + a_{i-1,j,k} + a_{i,j+1,k}) \quad (7b)$$

$$q_3 = a_{i+1,j,k-1} - (a_{i,j,k} + a_{i+1,j,k} + a_{i,j,k-1}) \quad (7c)$$

$$q_4 = a_{i-1,j,k+1} - (a_{i,j,k} + a_{i-1,j,k} + a_{i,j,k+1}) \quad (7d)$$

$$q_5 = a_{i,j+1,k-1} - (a_{i,j,k} + a_{i,j+1,k} + a_{i,j,k-1}) \quad (7e)$$

$$q_6 = a_{i,j-1,k+1} - (a_{i,j,k} + a_{i,j-1,k} + a_{i,j,k+1}) \quad (7f)$$

把式(7)代入到式(6), 得出

$$\begin{aligned} & (D_{i,j,k} - P_{i,j,k} - T_{i,j,k}) a_{i,j,k-1} + (C_{i,j,k} - P_{i,j,k} - U_{i,j,k}) a_{i,j-1,k} + (B_{i,j,k} - Q_{i,j,k} - S_{i,j,k}) \cdot \\ & a_{i,j,k-1} (A_{i,j,k} + P_{i,j,k} + Q_{i,j,k} + R_{i,j,k} + S_{i,j,k} + T_{i,j,k} + U_{i,j,k}) a_{i,j,k} + \\ & (E_{i,j,k} - P_{i,j,k} - R_{i,j,k}) a_{i+1,j,k} + (F_{i,j,k} - Q_{i,j,k} - T_{i,j,k}) a_{i,j+1,k} + \\ & (G_{i,j,k} - S_{i,j,k} - U_{i,j,k}) a_{i,j,k+1} = a_{i,j,k} \end{aligned} \quad (8)$$

则由式(8), 可令式(4)中的 p_1, \dots, p_{13} 如下:

$$\begin{aligned} d_{i,j,k} &= D_{i,j,k} + p_1 = D_{i,j,k} - p_{i,j,k} - a_{i,j,k} T_{i,j,k}, d_{i,j,k} e_{i,j,k-1} = p_2 = R_{i,j,k}, \\ d_{i,j,k} f_{i,j,k-1} &= p_3 = T_{i,j,k}, c_{i,j,k} = C_{i,j,k} + p_4 = C_{i,j,k} - p_{i,j,k} - U_{i,j,k}, \\ c_{i,j,k} e_{i,j-1,k} &= p_5 = p_{i,j,k}, b_{i,j,k} = B_{i,j,k} + p_6 = B_{i,j,k} - Q_{i,j,k} - S_{i,j,k}, d_{i,j,k} g_{i,j,k} + c_{i,j,k} f_{i,j-1,k} + \\ b_{i,j,k} e_{i-1,j,k} + a_{i,j,k} &= A_{i,j,k} + p_7 = A_{i,j,k} + p_{i,j,k} + Q_{i,j,k} + R_{i,j,k} + S_{i,j,k} + T_{i,j,k} + \\ U_{i,j,k}, a_{i,j,k} e_{i,j,k} &= E_{i,j,k} + p_8 = E_{i,j,k} - p_{i,j,k} - R_{i,j,k}, b_{i,j,k} f_{i-1,j,k} = p_9 = \\ Q_{i,j,k}, a_{i,j,k} f_{i,j,k} &= F_{i,j,k} + p_{10} = F_{i,j,k} - Q_{i,j,k} - T_{i,j,k}, c_{i,j,k} g_{i,j-1,k} = p_{11} = U_{i,j,k}, \\ b_{i,j,k} g_{i-1,j,k} &= p_{12} = S_{i,j,k}, c_{i,j,k} g_{i,j,k} = G_{i,j,k} + p_{13} = G_{i,j,k} - S_{i,j,k} - U_{i,j,k} \end{aligned} \quad (9)$$

当 $\omega \rightarrow 1$ 时, 由式(9)解出 $a_{i,j,k}, b_{i,j,k}, c_{i,j,k}, d_{i,j,k}, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}$ 组成 L 和 U 矩阵, $d_{i,j,k}, c_{i,j,k}, b_{i,j,k}, a_{i,j,k}, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}$ 的具体表达式为

$$\begin{aligned} d_{i,j,k} &= D_{i,j,k} / (1 + e_{i,j,k-1} + f_{i,j,k-1}), c_{i,j,k} = C_{i,j,k} / (1 + e_{i,j-1,k} + g_{i,j-1,k}), b_{i,j,k} = \\ B_{i,j,k} / (1 + f_{i-1,j,k} + g_{i-1,j,k}), a_{i,j,k} &= A_{i,j,k} + (d_{i,j,k} e_{i,j,k-1} + d_{i,j,k} f_{i,j,k-1} + \\ c_{i,j,k} e_{i,j-1,k} + b_{i,j,k} f_{i-1,j,k} + c_{i,j,k} g_{i,j-1,k} + b_{i,j,k} g_{i-1,j,k}) - d_{i,j,k} g_{i,j,k-1} - \\ c_{i,j,k} f_{i,j-1,k} - b_{i,j,k} e_{i-1,j,k}; e_{i,j,k} &= (E_{i,j,k} - c_{i,j,k} e_{i,j-1,k} - d_{i,j,k} e_{i,j,k-1}) / a_{i,j,k}, \\ f_{i,j,k} &= (F_{i,j,k} - b_{i,j,k} f_{i-1,j,k} - d_{i,j,k} f_{i,j,k-1}) / a_{i,j,k}, \\ g_{i,j,k} &= (G_{i,j,k} - d_{i,j,k} g_{i-1,j,k} - c_{i,j,k} g_{i,j-1,k}) / a_{i,j,k} \end{aligned} \quad (10)$$

用式(10)在解 $d_{1,1,1}, c_{1,1,1}, \dots, g_{1,1,1}$ 等量时, $a_{0,1,1}$ 等不出现的量均设为 0.

2 迭代格式

对线性代数方程组 $Ax = b$, 选用以下格式迭代(参见文献[2]):

$$LU^{(n+1)} = LU^{(n)} + (\omega - A^{(n)}) \quad (11)$$

其中 ω 是一个松弛参数. 进行迭代时具体做法为: 设 $v^{(n+1)} = (LU - A)^{(n)} + b$; 解方程 $Lw^{(n+1)} = v^{(n+1)}$ 和 $Ux^{(n+1)} = w^{(n+1)}$ 解出 $x^{(n+1)}$, 由于 L 和 U 分别为下三角和上三角矩阵, 这两个方程可用直接法求得.

3 收敛性的讨论

对格式(11)的收敛性, 采用与文献[1]相似的方法讨论. 对于 ω 取 1 附近时, 给出定理 1. 对于 ω 和 1 相差较大时, 分别就 $\omega > 1$ 和 $\omega < 1$ 做出讨论.

设 A 为强对角占优矩阵. 不失一般性, 可设 A 的主对角元素 $A_{i,j,k}$ 均为 1, 并且设 $B_{i,j,k}, C_{i,j,k}, D_{i,j,k}$,

$E_{i,j,k}, F_{i,j,k}, G_{i,j,k}$ 是比较小的数,此时对 $\forall i,j,k$ 有

$$\begin{aligned} A_{i,j,k} &= 1, B_{i,j,k} = O(h), E_{i,j,k} = O(h), C_{i,j,k} = O(z), \\ F_{i,j,k} &= O(z), D_{i,j,k} = O(q), G_{i,j,k} = O(q) \end{aligned} \tag{12}$$

其中 h, z, q 为小正数(此处的 h 和式(1)的 h 意义不同).

引理 1 在式(12)的假设下,若 h, z, q 充分小,则由式(10)得出的 $d_{i,j,k}, c_{i,j,k}, b_{i,j,k}, a_{i,j,k}, e_{i,j,k}, f_{i,j,k}, g_{i,j,k}$ 各量估计式为

$$\begin{cases} d_{i,j,k} = O(q), c_{i,j,k} = O(z), b_{i,j,k} = O(h) \\ a_{i,j,k} = 1 + O(q^2 + z^2 + h^2) \\ e_{i,j,k} = O(h + zq), f_{i,j,k} = O(z + hq), g_{i,j,k} = O(q + hz) \end{cases} \tag{13}$$

由于其证明和文献[1]相应引理的证明基本一致,此处略去.

定理 1 在式(12)的假设下,若 h, q, z 充分小,则用 $LU^{(n+1)} = LU^{(n)} + (I - A^{(n)})$ 解 $A = LU$, L 和 U 由式(10)解得,当 λ 取 1 附近,迭代矩阵 $M^{-1}N$ 的谱半径 $\rho(M^{-1}N)$ 有估计式

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{1}{1 - \lambda} + O(zh^2 + qh + q^2z) \tag{14}$$

其中 $M = L \times U, N = L \times U - A$.

证明 $N = L \times U - A$ 亦为形如图 2 的 13 对角矩阵,利用式(13)易知自上而下其各量分别为

$O((1 - \lambda)q + zh^2 + qh + q^2z), O(zh^2 + qh + q^2z), O(zh^2 + qh + q^2z), O((1 - \lambda)z + zh^2 + qh + q^2z), O(zh^2 + qh + q^2z), O((1 - \lambda)h + zh^2 + qh + q^2z), |1 - \lambda| + O(zh^2 + qh + q^2z), O((1 - \lambda)h + zh^2 + qh + q^2z), O(zh^2 + qh + q^2z), O((1 - \lambda)z + zh^2 + qh + q^2z), O(zh^2 + qh + q^2z), O(zh^2 + qh + q^2z), O((1 - \lambda)q + zh^2 + qh + q^2z)$ 的量,从而 N 的元素最大为 $|1 - \lambda| + O(zh^2 + qh + q^2z)$ 的量,记之为 $N|1 - \lambda| + O(zh^2 + qh + q^2z)$, 而 $M^{-1}N = (A + N)^{-1}N = (I + \lambda^{-1}A^{-1}N)^{-1} \lambda^{-1}A^{-1}N$, $\lambda^{-1}A^{-1}N$ 的元素最大为 $\lambda^{-1}|1 - \lambda| + \lambda^{-1}O(zh^2 + qh + q^2z)$,当 λ 取 1 附近时, $\lambda^{-1}A^{-1}N < 1$,则由泛函中熟知的定理得

$$\lambda^{-1}A^{-1}N \leq \lambda^{-1}A^{-1}N / (1 - \lambda^{-1}A^{-1}N) \tag{15}$$

此时 $1/(1 - \lambda^{-1}A^{-1}N)$ 为 $O(1)$ 的量,所以 $M^{-1}N$ 可用 $\lambda^{-1}A^{-1}N$ 来代替,由 $\rho(M^{-1}N) = \rho(\lambda^{-1}A^{-1}N)$,即得式(14),定理证毕.

由定理 1 可见,在保持 λ 在 1 附近时, λ 略大于 1 可以加速收敛.

下面讨论 λ 离 1 较远的情况,只给出定性的分析.对于 λ 离 1 较远, $|1 - \lambda|$ 不再是小量,所以 N 主要由 $|1 - \lambda|$ 决定. $\lambda^{-1}A^{-1}N$ 主要由 $\lambda^{-1}|1 - \lambda|$ 决定.对于 $\lambda < 1$ 的情况, $\lambda/2$ 就不再适用式(15),但是此时 M 和 N 的接近程度很好,所以收敛性还是可以做到.但是在实际计算中可以看到, λ 越小收敛越慢.不过对于性态不好的矩阵,当 λ 取得较大不收敛时,可以取较小的 λ 来保证收敛.对于 $\lambda > 1$ 的情况, $\lambda^{-1}|1 - \lambda| = 1 - \lambda^{-1} < 1$,此时式(15)的右端化为 $\frac{1 - \lambda^{-1}}{1 - (1 - \lambda^{-1})} = \lambda - 1$,所以当 $\lambda > 2$ 时,将肯定不收敛.由于式(15)为放大的,所以对于 $\lambda < 2$,较难做出结论.

4 计算实例

在一般的强隐式法求解三维情况下的椭圆型方程的七对角差分格式所形成的线性代数方程组时,常采用以下格式进行计算,对于如下的差分方程:

$$au_{i,j,k} + bu_{i-1,j,k} + cu_{i+1,j,k} + du_{i,j-1,k} + eu_{i,j+1,k} + fu_{i,j,k-1} + gu_{i,j,k+1} = h \tag{16}$$

把第三个方向的项,即 $fu_{i,j,k-1} + gu_{i,j,k+1}$ 移到差分方程(16)的右边,作为源项,则方程的左边是一个五对角的系数矩阵,可以采用标准的五对角强隐式分解(见文献[1]),并用和式(11)相类似的带松弛因子 ω 的格式迭代,不妨称此种格式为老格式.而本文给出的直接进行强隐式分解的算法称为新格式.经过计算实践发现,老格式的收敛速度远不如新格式来得快.下面给出算例.

在式(1)中,令 $a = b = c = 1.0, d = e = f = g = 0, h = -2y(1 - y)z(1 - z) - 2x(1 - x)z(1 - z) - 2x(1 - x)y(1 - y)$,在区域 $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ 上计算,边界条件为 $u|_{\partial\Omega} = 0$,则精确解为 $u = x(1 -$

$x) y(1 - y) z(1 - z)$, 网络剖分为 37^3 的等距剖分, 取 $\omega = 0.9$, 在 Intel Celeron 333 Hz 的 PC 机上分别用对新老格式进行迭代, 在相对误差 10^{-6} 时停止迭代, 结果见表 1.

表 1 新老格式下的计算结果的对比

Tab. 1 Comparison of computational results of new and old algorithms

	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8	0.7
新格式迭代次数	D	75	80	86	92	99	108	119	131	147
老格式迭代次数	D	D	D	D	D	D	516	562	618	687
新格式迭代时间/s		24	25	27	29	31	35	38	42	46
老格式迭代时间/s							114	124	136	152

注: D 表示不收敛

由此可见, 新格式的收敛速度在选取合适的条件下, 要好于老格式.

由于上面算例中的系数矩阵虽然不是严格对角占优的, 但是是不可约弱对角占优的, 和式 (12) 的条件还是结合得较好的, 所以和上一节的分析基本吻合: 在 $\omega = 1$ 附近时, 大于 1 时收敛速度较快, 但是当 ω 过大时, 就不收敛, 而 $\omega < 1$ 时速度较慢.

5 结论

对于三维椭圆型方程的七对角差分格式, 带参数的强隐式法的如上格式还是有效的. 较之上述的老格式, 收敛速度有较大的提高. 对于其收敛格式的收敛性也给出了相应的分析, 在强对角条件下, ω 的选择一般可以略大于 1, 而在不满足此条件时, ω 的选择则较困难, 要经过试验后得出.

参考文献:

- [1] 胡家赣. 线性代数方程组的迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1991.
- [2] 中省村一郎. 科技计算方法及其在流体力学和核系统中的应用[M]. 尹邦华译. 北京: 原子能出版社, 1987.
- [3] 马铁犹. 计算流体力学[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1986.

(上接第 856 页)

当 X/N_T 自反时, 在 $U(X/N_T)$ 上范数可达, 即 $\exists [x], \| [x] \| = 1$, 使得 $\| f([x]) \| = \| [x] \|$. 取 x_0 是 $[x]$ 的等模代表元, 于是

$$\| f([x]) \| = \| f(x_0) \|$$

即 $\| f(x_0) \| = \| f(x_0) \|$, 证毕.

参考文献:

- [1] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1986.