Equazioni integrali di Abel

Fisica Matematica 2

Franco Laudanna Del Guerra

21 Giugno 2007

La trattazione delle equazioni integrali è iniziata da N.H Abel nel 1800 con gli studi sulla Tautocrona ed è continuata grazie ai contributi di importanti matematici quali V. Volterra, E.I. Fredholm, D Hilbert, F.G Tricomi.

1. Intervallo di integrazione
2. Specie
3. Singolarità

- $\int_a^b K(t,\tau)u(\tau)\,d\tau$ Fredholm
- $\int_a^t K(t,\tau)u(\tau)\,d\tau$ Volterra

K(t,τ) kernel (conosciuto); u(t) funzione (sconosciuta)

- $\int_a^{b,t} K(t,\tau)u(\tau)\,d\tau = f(t)$ Prima specie
- $u(t) + \lambda \int_a^{b,t} K(t,\tau)u(\tau)\,d\tau = f(t)$ Seconda specie

f(t) termine libero (conosciuto)

L'aggettivo singolarità è usato quando l'integrazione è impropria,per esempio, se l'intervallo è infinito..

Nel nostro corso abbiamo studiato equazioni di tipo convolutivo in cui a=0 e il kernel soddisfa le condizioni $K(t,\tau)=K(t-\tau)$.

In particolare definiamo equazioni integrali di tipo Abel quelle in cui abbiamo un kernel del tipo:

$$K(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{t^{1-\alpha}} \tag{1}$$

con $0 < \alpha < 1$ e $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} \, d\alpha$

Il metodo del calcolo frazionario per risolvere le equazioni integrali fu intuito da Abel (1823,1826) prima che Liouville e Riemann lo sviluppassero in maniera più rigorosa. Per risolvere le equazioni integrali necessitiamo delle definizioni di operatore integrale frazionario J^{α} e di operatore derivata frazionaria D^{α}

Integrale frazionario di ordine $\alpha > 0$

$$J^{\alpha} f(t) = \Phi_{\alpha}(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \qquad (2)$$

con $t > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e:

$$\Phi_{\alpha}(t) := \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \qquad (3)$$

Funzione di Gel'fand-Shilov

Derivata frazionaria di ordine $\alpha > 0$

$$D^{\alpha} f(t) = D^{m} J^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^{m}}{dt^{m}} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{0}^{t} \frac{f(\tau)}{(t-\alpha)^{\alpha+1-m}} \, d\tau \right] \tag{4}$$

con $t > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m - 1 < \alpha < m$

Da queste definizioni riconosciamo come l'equazioni di Abel possano essere scritte in quetso modo:

- $J^{\alpha}u(t) = f(t)$ Prima specie
- $(1 + \lambda J^{\alpha})u(t) = f(t)$ Seconda specie

Risolvendo si ottiene per la prima specie:

$$u(t) = D^{\alpha} f(t) \tag{5}$$

con $0 < \alpha < 1$ implica m=1

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\, d\tau \tag{6}$$

Per la seconda specie invece ci si riconduce ad una forma del tipo:

$$u(t) = (1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n J^{\alpha n}) f(t) \tag{7}$$

Successivamente sfruttando la definizione di integrale frazionario e le funzioni di Gel'fand-Shilov e di Mittag-Leffler si arriva alla soluzione:

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t e_\alpha(t-\tau;\lambda) f(\tau)\, d\tau \tag{8}$$

con

$$e_\alpha(t;\lambda) := E_\alpha(-\lambda t^\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \tag{9}$$

La Tautocrona è la curva per cui il tempo impiegato da una particella, che scivola lungo di essa senza attriti, per arrivare al punto più basso di essa è uguale ad una data funzione della sua altezza iniziale. Il problema fù studiato da Abel che cercò di determinare la curva tramite il calcolo frazionario e discusse anche il caso dell'Isocrona in cui il tempo di discesa è indipendente dall'altezza di partenza.

Animazione isocrona

Si parte dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(Y - y) \tag{10}$$

-Dove s è l'arco di curva, m è la massa della particella, g è l'accelerazione di gravità,(X,Y) sono le coordinate del punto di partenza Poniamo ds/dt<0 e scriviamo:

$$ds = -\sqrt{2g(Y - y)}dt = -|v|dt \tag{11}$$

dove v è la velocità scalare.

Allora possiamo scrivere:

$$T(Y)=\int_0^{s(Y)}\frac{ds}{|v|}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{Y}\frac{(ds/dy)}{\sqrt{Y-y}}dy \tag{12}$$

E' possibile ricondursi ora ad un equazione integrale di prima specie ponendo $u(y) = \frac{ds}{dy}$ e $f(y) = \sqrt{\frac{2g}{\pi} T(Y)}$:

$$\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^Y \frac{u(y)}{\sqrt{Y-y}} = f(y) = J^{1/2} u(Y) \tag{13}$$

che ha come soluzione:

$$u(Y) = D^{1/2} f(Y) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dY} \int_0^Y \frac{f(y)}{\sqrt{Y-y}}\, dy \tag{14}$$

La soluzione è dunque:

$$s(Y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^Y \frac{T(Y)}{\sqrt{Y-y}} dy \tag{15}$$

Nel caso dell'Isocrona si pone T(Y)=costante e quindi si ottiene:

$$s(Y) = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^Y \frac{1}{\sqrt{Y-y}}dy = 2\sqrt{2R}Y^{1/2} \qquad (16)$$

con $R = g\frac{T^2}{\pi^2}$. Si può dimostrare che la curva dell'Isocrona è una cicloide generata da un punto fisso di un cerchio di raggio R che scorre senza scivolare sotto la linea y=2R

Animazione cicloide

Vediamo ora un metodo alternativo per risolvere il problema della Tautocrona, l'utilizzo della trasformata di Laplace. Si parte dall'equazione:

$$T(Y) = \int_0^{s(Y)} \frac{ds}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{Y} \frac{(ds/dy)}{\sqrt{Y-y}} dy \qquad (17)$$

Questa può essere vista come la convoluzione fra $\frac{ds}{dy}$ e $\frac{1}{\sqrt{y}}$.

Applichiamo una trasformata di Laplace da entrambe le parti, sfruttando le proprieta di quest'ultima a riguardo della convoluzione ed otteniamo:

$$\mathcal{L}\left[T(Y)\right] = \frac{1}{\sqrt{2g}}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]\mathcal{L}\left[\frac{ds}{dy}\right] \tag{18}$$

Poichè $\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right] = \sqrt{\pi}s^{-1/2}$ possiamo scrivere:

$$\mathcal{L}\left[\frac{ds}{dy}\right] = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}s^{1/2}\mathcal{L}\left[T(Y)\right] \tag{19}$$

A questo punto data T(Y) basta ritrasformare per ottenere il risultato.

Ponendo T costante e sapendo che $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ otteniamo:

$$\mathcal{L}\left[\frac{ds}{dy}\right] = T\sqrt{\frac{2g}{\pi}}s^{-1/2} \tag{20}$$

Che trasformando di nuovo mi da come risultato:

$$\frac{ds}{dy} = T\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{Y-y}} \tag{21}$$