Caminos reticulares, álgebra lineal y combinatoria
Día 2

Carolina Benedetti Velásquez

Universidad de los Andes

con Jerónimo Valencia

Mathematics Sin Fronteras
Noviembre 4, 2021

La vez pasada

Una matroide $M = (E, \mathcal{B})$ sobre el conjunto E es tal que $\mathcal{B}$ consiste de subconjuntos de E donde:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- Para todos $A, B \in \mathcal{B}$, para todo $a \in A - B$ existe $b \in B - A$ tal que $A - a + b \in \mathcal{B}$.

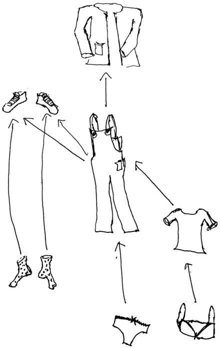
Ejemplos:

Grafos: $G = (E, \mathcal{B})$ donde E es el conjunto de aristas y $\mathcal{B}$ es la colección de árboles generadores.

k-e.v.: Sea V un espacio vectorial k-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Entonces $M_V = ([n], \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B} = \{J \,:\, |J| = k, p_J \neq 0\}$.

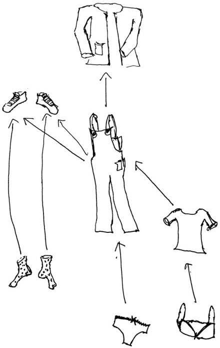
Hoy: Conjuntos Parcialmente Ordenados - posets

crédito: Viviane Pons



Hoy: Conjuntos Parcialmente Ordenados - posets

crédito: Viviane Pons



IDEA: Dada una colección de objetos, ordenarlos de acuerdo a una regla establecida.

Posets

U conjunto parcialmente ordenado es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto y $\leq$ es tal que para todos $x, y, z \in P$:

- $x \leq x$ (reflexiva)
- Si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$ (antisimétrica)
- Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$ (transitiva).

Posets

U conjunto parcialmente ordenado es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto y $\leq$ es tal que para todos $x, y, z \in P$:

- $x \leq x$ (reflexiva)
- Si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$ (antisimétrica)
- Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$ (transitiva).

Ejemplos:

- $(\mathbb{N}, \leq)$.
- $(D_n, \leq)$ donde $D_n = \{m \geq 1 : m|n\}$ y $k \leq m \leftrightarrow k|m$.

Posets

U conjunto parcialmente ordenado es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto y $\leq$ es tal que para todos $x, y, z \in P$:

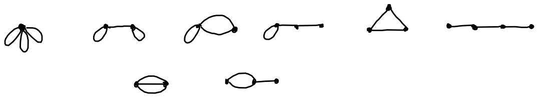
- $x \leq x$ (reflexiva)
- Si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$ (antisimétrica)
- Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$ (transitiva).

Ejemplos:

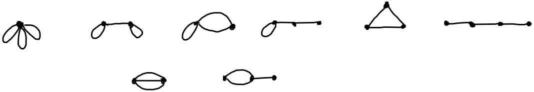
- $(\mathbb{N}, \leq)$.
- $(D_n, \leq)$ donde $D_n = \{m \geq 1 : m|n\}$ y $k \leq m \leftrightarrow k|m$.

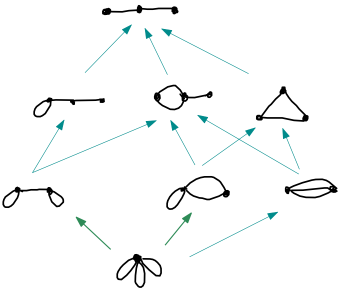
Notación: $x \lessdot y \leftrightarrow x < y$ y ningún z satisface $x < z < y$ (y cubre a x).

Ordenemos las matroides gráficas sobre $[n]$



Ordenemos las matroides gráficas sobre [n]

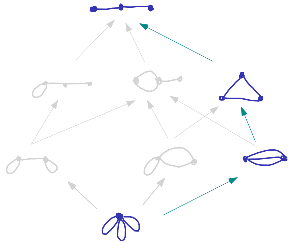




- $\circ$ $g \lessdot h \leftrightarrow$ todo circuito de h es unión de circuitos en g.

Cadenas del poset

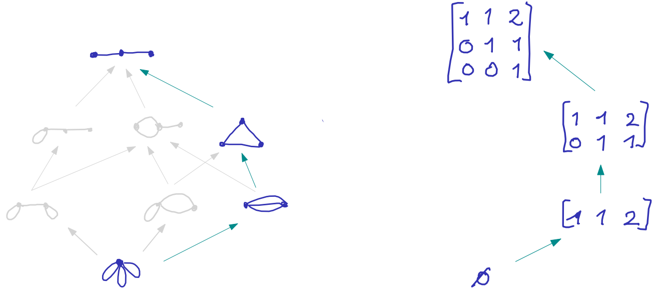
- ¿Cómo podemos ordenar el conjunto de LPMs sobre $[n]$?
- ¿Para qué?



$$\emptyset \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cadenas del poset

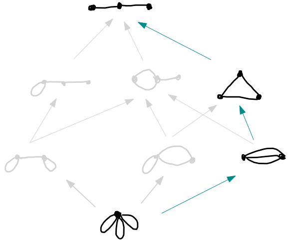
- ¿Cómo podemos ordenar el conjunto de LPMs sobre $[n]$?
- ¿Para qué?



- Necesitamos una buena axiomatización que capture lo que está ocurriendo en el lado derecho.

Cocientes de matroides

Una matroide N es un cociente de una matroide M si todo circuito de M es una unión de circuitos de N.



$$
\begin{tikzcd}
 & & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \arrow[u] \\
 & & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \arrow[u] \\
\emptyset \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$

LPMs

- Como cualquier cosa sobre matroides, esta definición tiene MUCHAS equivalentes.
- ¿Qué se puede hacer en el caso de LPM's? ¿usar su combinatoria?

LPMs

- Como cualquier cosa sobre matroides, esta definición tiene MUCHAS equivalentes.
- ¿Qué se puede hacer en el caso de LPM's? ¿usar su combinatoria?
- ¡Contestaremos esto usando únicamente dibujos la próxima vez!

LPMs

- Como cualquier cosa sobre matroides, esta definición tiene MUCHAS equivalentes.
- ¿Qué se puede hacer en el caso de LPM's? ¿usar su combinatoria?
- ¡Contestaremos esto usando únicamente dibujos la próxima vez!

¡Muchas gracias!