Caminos reticulares, álgebra lineal y combinatoria
Día 1

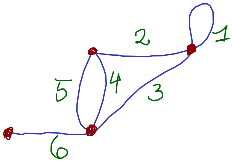
Carolina Benedetti Velásquez

Universidad de los Andes

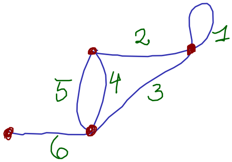
con Jerónimo Valencia

Mathematics Sin Fronteras
Octubre 28, 2021

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal

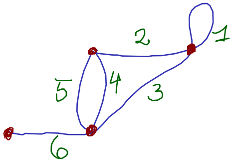


Teoría de Grafos y Álgebra Lineal



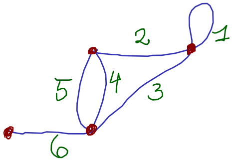
Árboles generadores:

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal



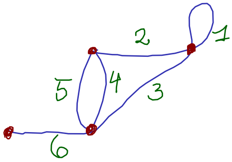
Árboles generadores:
$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal



Árboles generadores:
$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.
Ciclos:

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal



Árboles generadores:

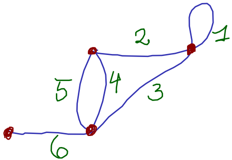
$\{236, 246, 256, 346, 356\}.$

Ciclos:

$\{234, 45, 1\}.$

Bosques:

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal



Árboles generadores:

$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.

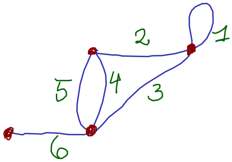
Ciclos:

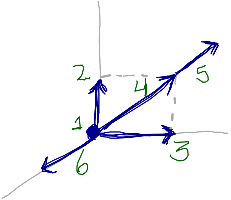
$\{234, 45, 1\}$.

Bosques:

$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, \ldots\}$.

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal





Árboles generadores:

$\{236, 246, 256, 346, 356\}.$

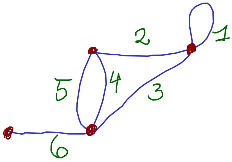
Ciclos:

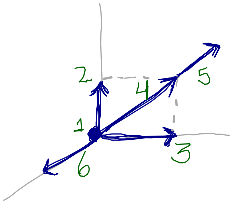
$\{234, 45, 1\}.$

Bosques:

$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, \ldots\}.$

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal

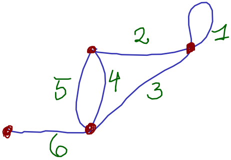


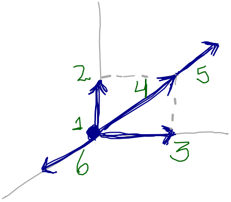


Árboles generadores:
$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.
Ciclos:
$\{234, 45, 1\}$.
Bosques:
$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, \ldots\}$.

Bases:

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal





Árboles generadores:

$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.

Ciclos:

$\{234, 45, 1\}$.

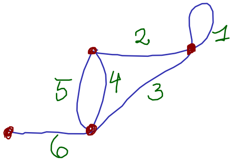
Bosques:

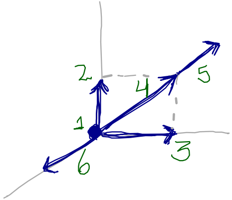
$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, \dots\}$.

Bases:

$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal





Árboles generadores:

$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.

Ciclos:

$\{234, 45, 1\}$.

Bosques:

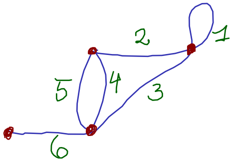
$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, \dots\}$.

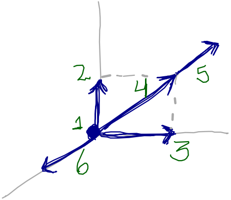
Bases:

$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.

Depend. minimales:

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal





Árboles generadores:

$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.

Ciclos:

$\{234, 45, 1\}$.

Bosques:

$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, \dots\}$.

Bases:

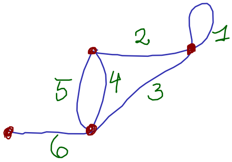
$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.

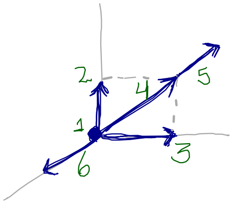
Depend. minimales:

$\{234, 45, 1\}$.

Independientes:

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal

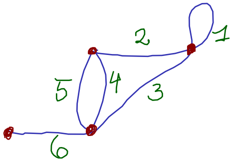


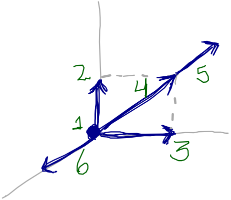


Árboles generadores:
$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.
Ciclos:
$\{234, 45, 1\}$.
Bosques:
$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, \dots\}$.

Bases:
$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.
Depend. minimales:
$\{234, 45, 1\}$.
Independientes:
$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 46, \dots\}$.

Teoría de Grafos y Álgebra Lineal





Árboles generadores:

$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.

Ciclos:

$\{234, 45, 1\}$.

Bosques:

$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, \dots\}$.

Bases:

$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.

Depend. minimales:

$\{234, 45, 1\}$.

Independientes:

$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 46, \dots\}$.

Matroides

Una matroide $M = (E, \mathcal{B})$ sobre el conjunto E es tal que $\mathcal{B}$ consiste de subconjuntos de E donde:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- Para todos $A, B \in \mathcal{B}$, para todo $a \in A - B$ existe $b \in B - A$ tal que $A - a + b \in \mathcal{B}$.

Matroides

Una matroide $M = (E, \mathcal{B})$ sobre el conjunto E es tal que $\mathcal{B}$ consiste de subconjuntos de E donde:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- Para todos $A, B \in \mathcal{B}$, para todo $a \in A - B$ existe $b \in B - A$ tal que $A - a + b \in \mathcal{B}$.

Ejemplos:

Grafos: $G = (E, \mathcal{B})$ donde E es el conjunto de aristas y $\mathcal{B}$ es la colección de árboles generadores.

k-e.v.: Sea V un espacio vectorial k-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Entonces $M_V = ([n], \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B} = \{J \,:\, |J| = k, p_J \neq 0\}$.

Matroides

Una matroide $M = (E, \mathcal{B})$ sobre el conjunto E es tal que $\mathcal{B}$ consiste de subconjuntos de E donde:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- Para todos $A, B \in \mathcal{B}$, para todo $a \in A - B$ existe $b \in B - A$ tal que $A - a + b \in \mathcal{B}$.

Ejemplos:

Grafos: $G = (E, \mathcal{B})$ donde E es el conjunto de aristas y $\mathcal{B}$ es la colección de árboles generadores.

k-e.v.: Sea V un espacio vectorial k-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Entonces $M_V = ([n], \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B} = \{J \ : \ |J| = k, p_J \neq 0\}$.

Por ejemplo,

$$V = \langle (2, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 2) \rangle$$

Matroides

Una matroide $M = (E, \mathcal{B})$ sobre el conjunto E es tal que $\mathcal{B}$ consiste de subconjuntos de E donde:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- Para todos $A, B \in \mathcal{B}$, para todo $a \in A - B$ existe $b \in B - A$ tal que $A - a + b \in \mathcal{B}$.

Ejemplos:

Grafos: $G = (E, \mathcal{B})$ donde E es el conjunto de aristas y $\mathcal{B}$ es la colección de árboles generadores.

k-e.v.: Sea V un espacio vectorial k-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Entonces $M_V = ([n], \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B} = \{J \ : \ |J| = k, p_J \neq 0\}$.

Por ejemplo,

$$V = \langle (2,0,0,1), (1,1,0,2) \rangle \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Más ejemplos

Una matroide $M = (E, \mathcal{B})$ sobre el conjunto E es tal que $\mathcal{B}$ consiste de subconjuntos de E donde:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- Para todos $A, B \in \mathcal{B}$, para todo $a \in A - B$ existe $b \in B - A$ tal que $A - a + b \in \mathcal{B}$.

Más ejemplos

Una matroide $M = (E, \mathcal{B})$ sobre el conjunto E es tal que $\mathcal{B}$ consiste de subconjuntos de E donde:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- Para todos $A, B \in \mathcal{B}$, para todo $a \in A - B$ existe $b \in B - A$ tal que $A - a + b \in \mathcal{B}$.

Ejemplos:

Grafos: $G = (E, \mathcal{B})$ donde E es el conjunto de aristas y $\mathcal{B}$ es la colección de árboles generadores.

k-e.v.: Sea V un espacio vectorial k-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Entonces $M_V = ([n], \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B} = \{J \; : \; |J| = k, p_J \neq 0\}$.

Más ejemplos

Una matroide $M = (E, \mathcal{B})$ sobre el conjunto E es tal que $\mathcal{B}$ consiste de subconjuntos de E donde:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- Para todos $A, B \in \mathcal{B}$, para todo $a \in A - B$ existe $b \in B - A$ tal que $A - a + b \in \mathcal{B}$.

Ejemplos:

Grafos: $G = (E, \mathcal{B})$ donde E es el conjunto de aristas y $\mathcal{B}$ es la colección de árboles generadores.

k-e.v.: Sea V un espacio vectorial k-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Entonces $M_V = ([n], \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B} = \{J \ : \ |J| = k, p_J \neq 0\}$.

Otros: matroides transversales, matroides algebráicas, $0,1$-permutaedros generalizados...

Más ejemplos

Una matroide $M = (E, \mathcal{B})$ sobre el conjunto E es tal que $\mathcal{B}$ consiste de subconjuntos de E donde:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- Para todos $A, B \in \mathcal{B}$, para todo $a \in A - B$ existe $b \in B - A$ tal que $A - a + b \in \mathcal{B}$.

Ejemplos:

Grafos: $G = (E, \mathcal{B})$ donde E es el conjunto de aristas y $\mathcal{B}$ es la colección de árboles generadores.

k-e.v.: Sea V un espacio vectorial k-dimensional en $\mathbb{R}^n$. Entonces $M_V = ([n], \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B} = \{J \ : \ |J| = k, p_J \neq 0\}$.

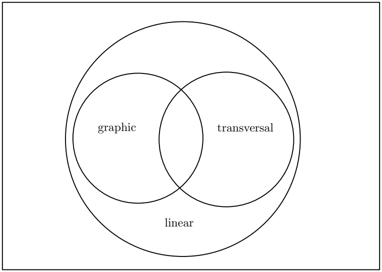
Otros: matroides transversales, matroides algebráicas, $0,1$-permutaedros generalizados...

"Quien haya trabajado con matroides se ha convencido que las matroides son una de las ideas más ricas y útiles de nuestros días."

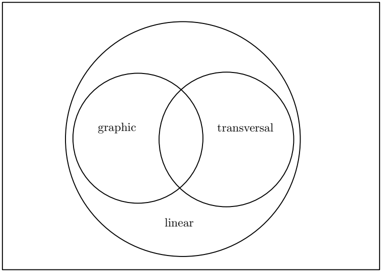
-Gian Carlo Rota

∘ Las matroides pueden definirse en al menos 10 formas (axiomatizaciones distintas): bases, conjuntos independientes, circuitos, politopos, posets, ...

◦ Las matroides pueden definirse en al menos 10 formas (axiomatizaciones distintas): bases, conjuntos independientes, circuitos, politopos, posets, ...



◦ Las matroides pueden definirse en al menos 10 formas (axiomatizaciones distintas): bases, conjuntos independientes, circuitos, politopos, posets, ...



Alternativas a bases

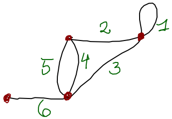
Sea $M = (E, \mathcal{B})$ una matroide.

- $I \subseteq E$ es *independiente* si $I \subset B$ para alguna base B.
- $D \subseteq E$ es *dependiente* si no es independiente.
- $IC \subseteq E$ es un *circuito* si C es dependiente minimal.
- El rango de M es $r(M) = |B|$ para cualquier base B.

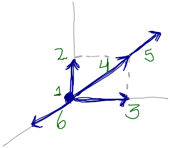
Alternativas a bases

Sea $M = (E, \mathcal{B})$ una matroide.

- $I \subseteq E$ es *independiente* si $I \subset B$ para alguna base B.
- $D \subseteq E$ es *dependiente* si no es independiente.
- $IC \subseteq E$ es un *circuito* si C es dependiente minimal.
- El rango de M es $r(M) = |B|$ para cualquier base B.



Árboles generadores:
$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.
Ciclos:
$\{234, 45, 1\}$.
Bosques:
$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, \ldots\}$.



Bases:
$\{236, 246, 256, 346, 356\}$.
Depend. minimales:
$\{234, 45, 1\}$.
Independientes:
$\{\emptyset, 2, 3, 4, 5, 6, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 46, \ldots\}$.

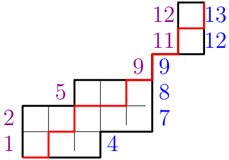
Matroides de caminos reticulares (LPMs)

Fije $0 \leq k \leq n$ y sean $U, L \in \binom{[n]}{k}$.
La **matroide de caminos reticulares** $M[U, L]$ es la matroide sobre $[n]$ cuyas bases son $B \in \binom{[n]}{k}$ tales que $U \leq B \leq L$.

Matroides de caminos reticulares (LPMs)

Fije $0 \leq k \leq n$ y sean $U, L \in \binom{[n]}{k}$.
La **matroide de caminos reticulares** $M[U, L]$ es la matroide sobre $[n]$ cuyas bases son $B \in \binom{[n]}{k}$ tales que $U \leq B \leq L$.

Por ejemplo, sean $k = 6, n = 13$, $U = \{1, 2, 5, 9, 11, 12\}$, $L = \{4, 7, 8, 9, 12, 13\}$.

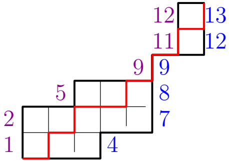


entonces $B = \{2, 4, 7, 9, 11, 13\}$ es una base de $M[U, L]$.

Matroides de caminos reticulares (LPMs)

Fije $0 \leq k \leq n$ y sean $U, L \in \binom{[n]}{k}$.
La **matroide de caminos reticulares** $M[U, L]$ es la matroide sobre $[n]$ cuyas bases son $B \in \binom{[n]}{k}$ tales que $U \leq B \leq L$.

Por ejemplo, sean $k = 6, n = 13$, $U = \{1, 2, 5, 9, 11, 12\}$, $L = \{4, 7, 8, 9, 12, 13\}$.



entonces $B = \{2, 4, 7, 9, 11, 13\}$ es una base de $M[U, L]$.

◦ Las LPMs son matroides lineales.

Matroides con más estructura...

Lo que queremos es considerar matroides M_1, M_2, M_3 como sigue:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} \subset \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{M_2} \subset \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_3}$$

Matroides con más estructura...

Lo que queremos es considerar matroides M_1, M_2, M_3 como sigue:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} \subset \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{M_2} \subset \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_3}$$

○ ¿Cómo podemos entender esta relación desde un punto de vista matroidal?

• La importancia algebro-geométrica depende del hecho que la secuencia $M_1 \subset M_2 \subset M_3$ corresponde a un punto en la *variedad bandera completa* $\mathcal{F}\ell_3$.

Lo que vendrá...

- Posets

Lo que vendrá...

- Posets de LPMs

Lo que vendrá...

- Posets de LPMs

¡Muchas gracias!