Re-Imaginando el Mundo a través del Algebra Lineal

Malena I. Espanol
Docente en Matemática Computacional

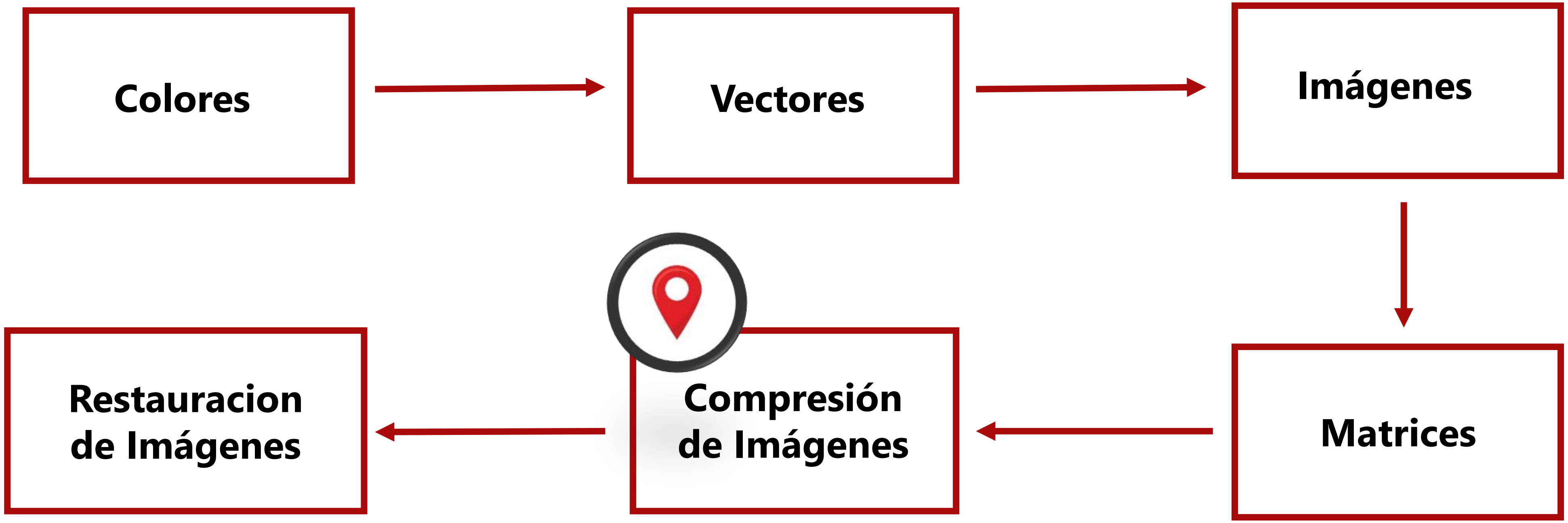
Victoria Uribe
Estudiante Doctoral de Matemática Aplicada

Facultad de Ciencias Matemáticas y Estadísticas
Arizona State University
malena.espanol@asu.edu

Mathematics Sin Fronteras
March10, 17, 24, 2021

Arizona State University

El plan


Colores
Vectores
Imágenes
Matrices
Compresión de Imágenes
Restauracion de Imágenes

Descomposición en Valores Singulares (SVD)

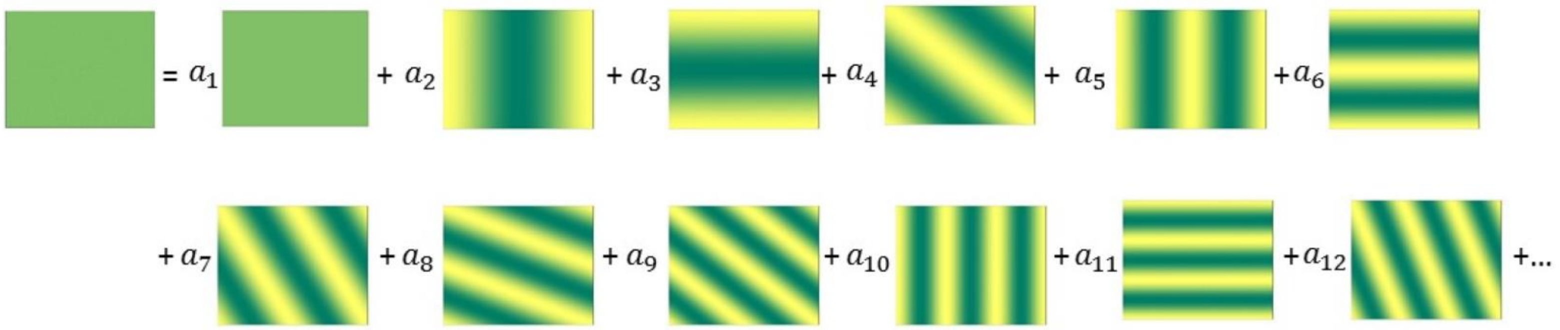
Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces, existen matrices $U \in \mathbb{R}^{n\times n}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $U^TU = V^TV = I_n$, y $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mathrm{n})$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$, tales que $A = U\Sigma V^T$. Las columnas de U se llaman los vectores singulares izquierdos, las columnas de V los vectores singulares derechos, is σ_i se llaman valores singulares.

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & v_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & v_n^T & — \end{pmatrix}$$

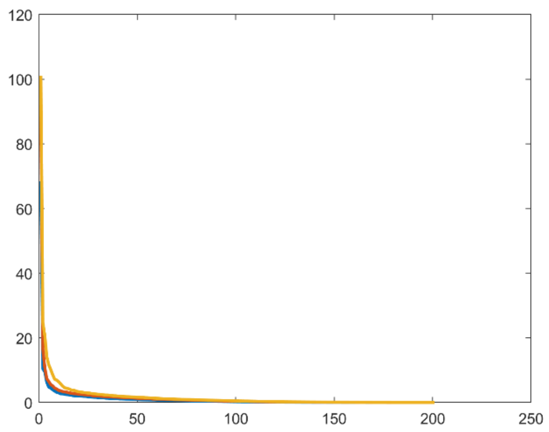
$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & \sigma_1 v_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & \sigma_n v_n^T & — \end{pmatrix} = \Sigma_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T$$

El SVD and TSVD de una Imagen

$$A = U\Sigma V^T = \Sigma_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \sigma_3 u_3 v_3^T + \cdots + \sigma_n u_n v_n^T$$



$$A_k = U_k \Sigma_k V_k^T = \Sigma_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

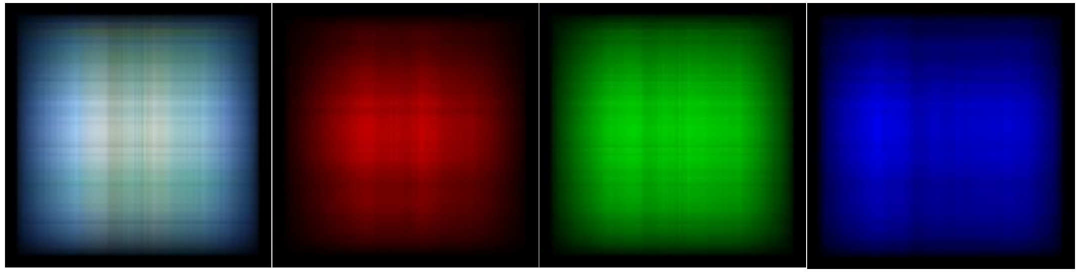


¿Cuál es el costo de almacenar estas matrices?

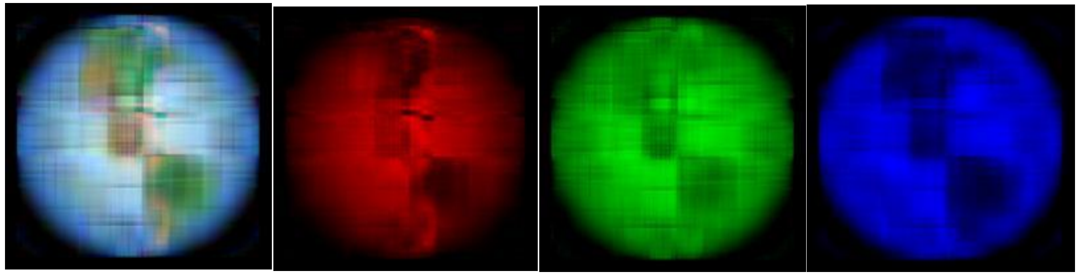
¿Cuál es el costo de calcular la matriz Ak?

Compresión de Imágenes Mediante SVD

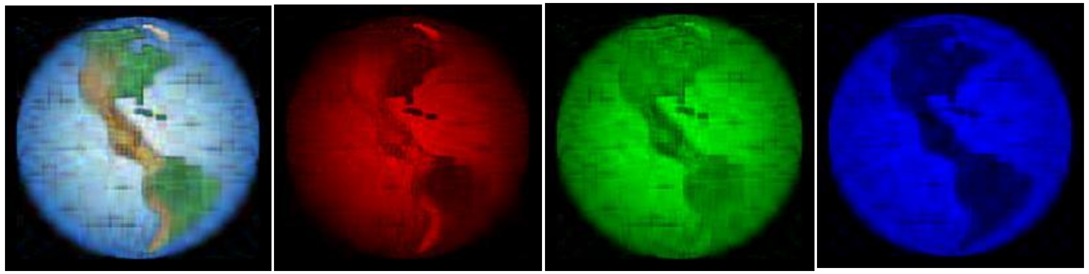
k=1



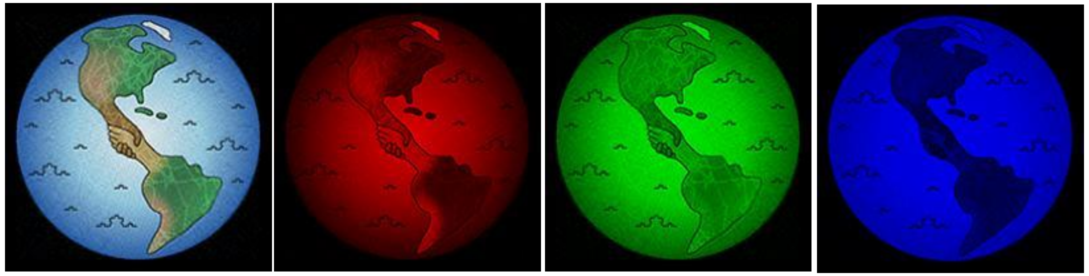
k=5



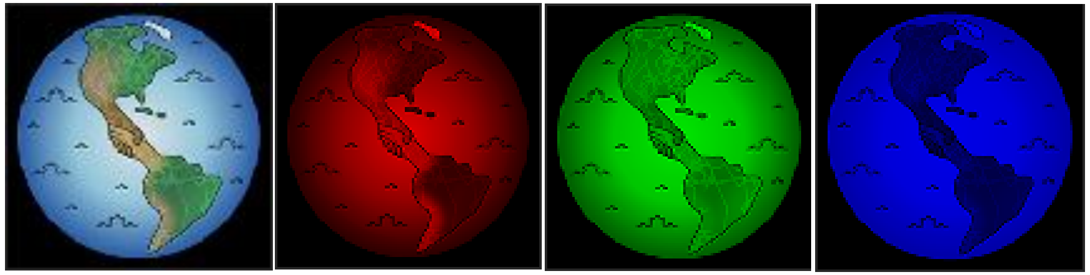
k=10



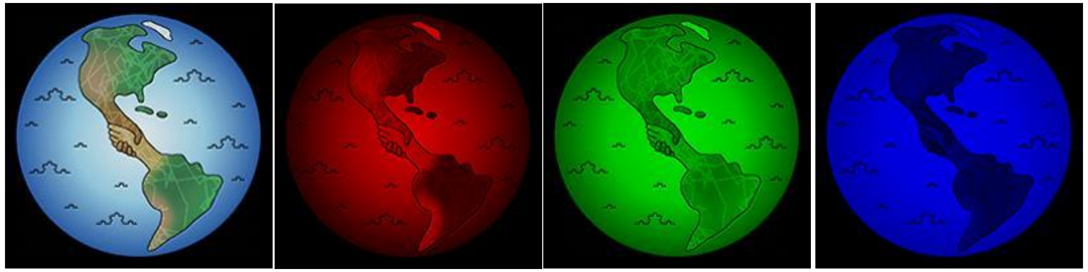
k=50



k=100



k=256



Normas de Matrices and Distancias

Definición: La *norma Frobenius* de una matriz A está definida por

$$\|A\|_F = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{mn}^2}$$

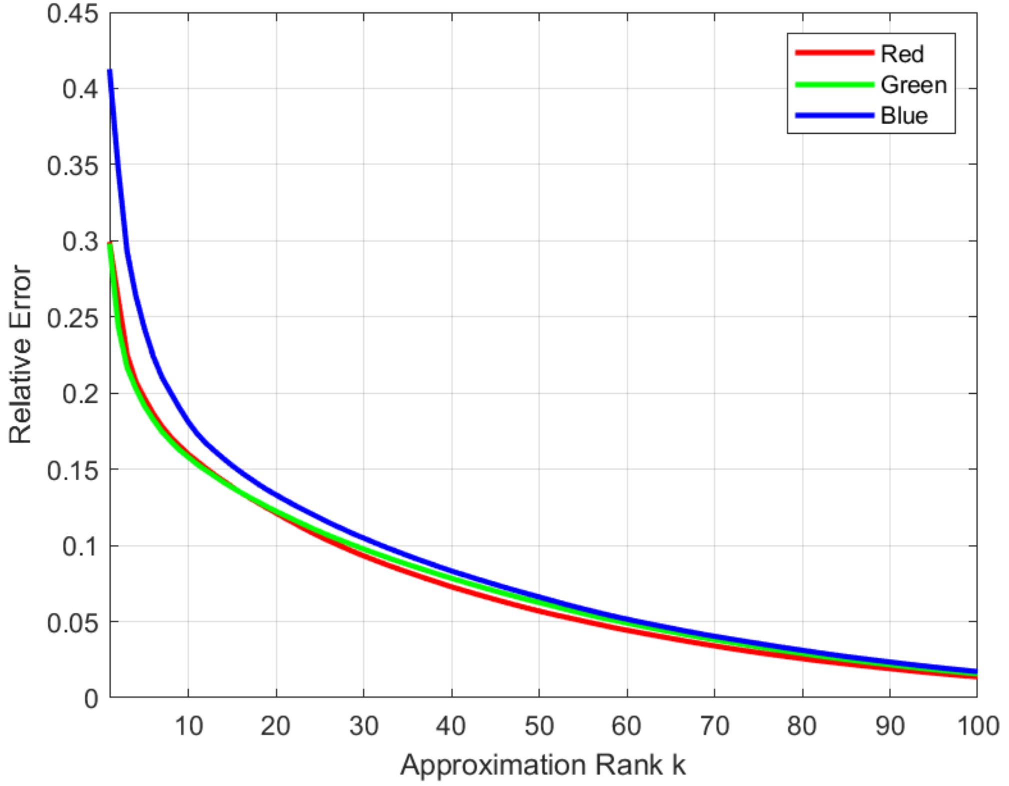
Ejemplos: $\left\|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\|_F = \sqrt{30}$ y $\left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\|_F = \sqrt{2}$

Definición: La *distancia de Frobenius* entre dos matrices A y B está definida por

$$d(A,B) = \|A - B\|_F = \sqrt{(a_{11} - b_{11})^2 + (a_{12} - b_{12})^2 + \cdots + (a_{mn} - b_{mn})^2}$$

Ejemplo: $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\|_F = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\right\|_F = \sqrt{22}$

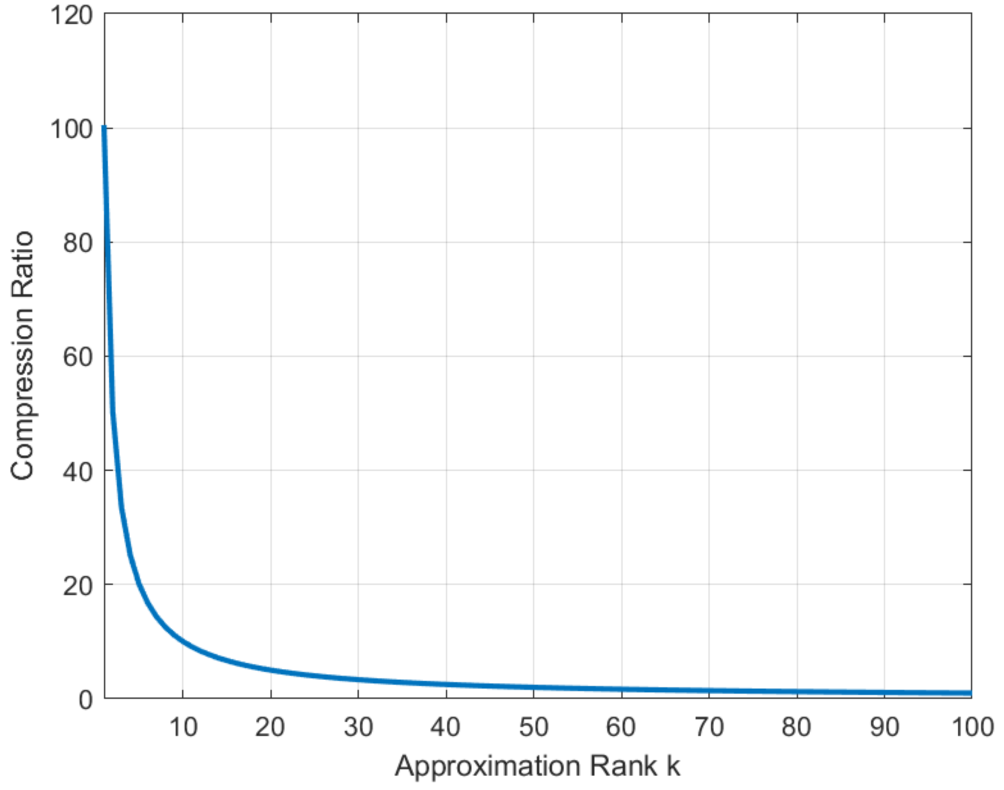
Compresión de Imágenes : Error Relativo



Error Relativo:

$$\frac{||A - A_k||_F}{||A||_F}$$

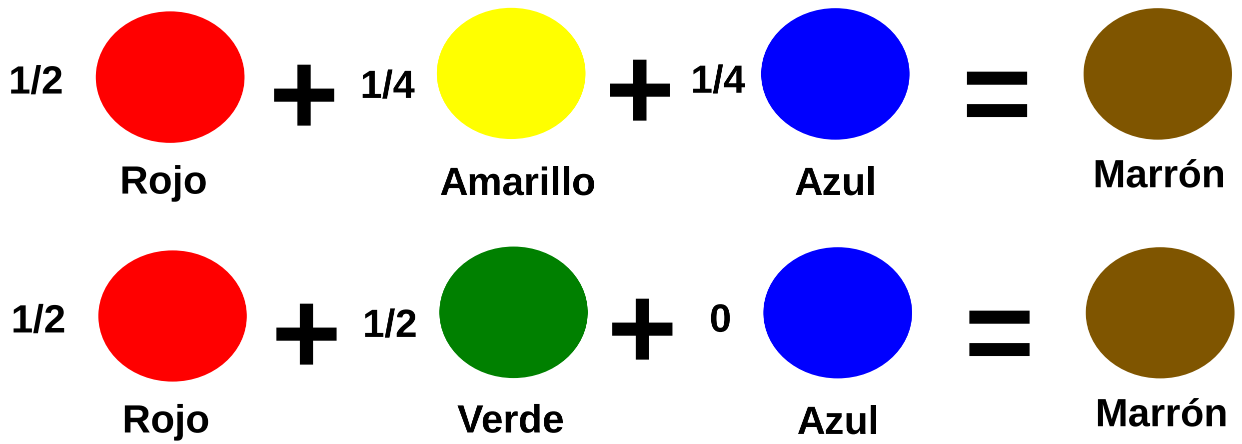
Compresión de imágenes: Taza de Compresión

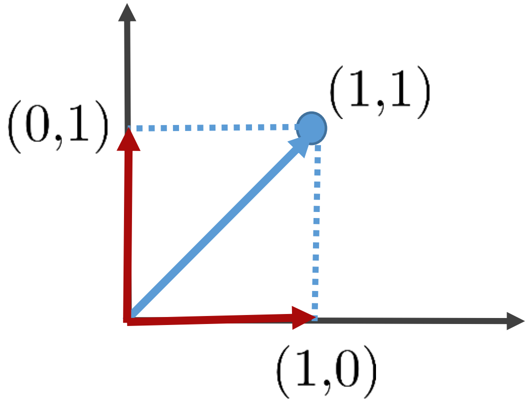


Taza de Compresión:

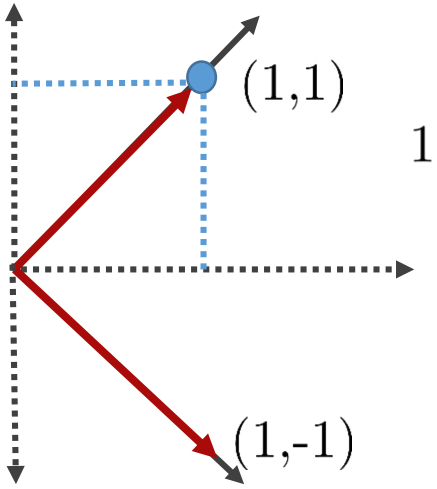
$$\frac{mn}{k(m+n+1)}$$

Sistema de Coordenadas





$$1\ (1{,}0) + 1\ (0{,}1) = (1{,}1)$$



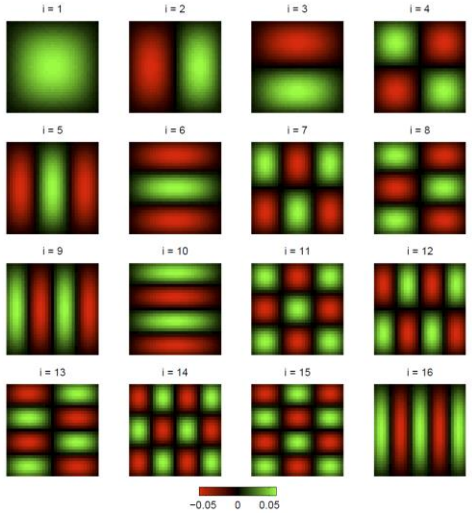
$$1\ (1{,}1) + 0\ (1{,}\text{-}1) = (1{,}1)$$

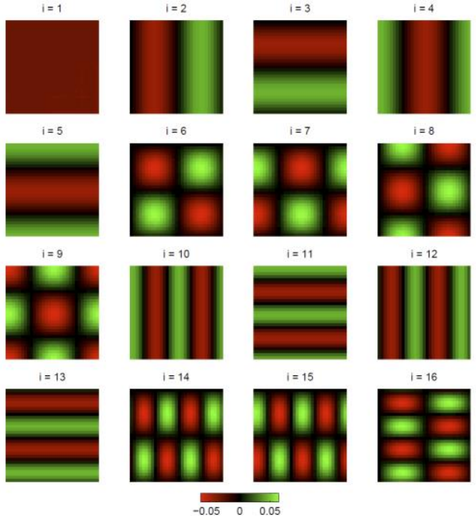
"Sistema de Coordenadas" para Matrices

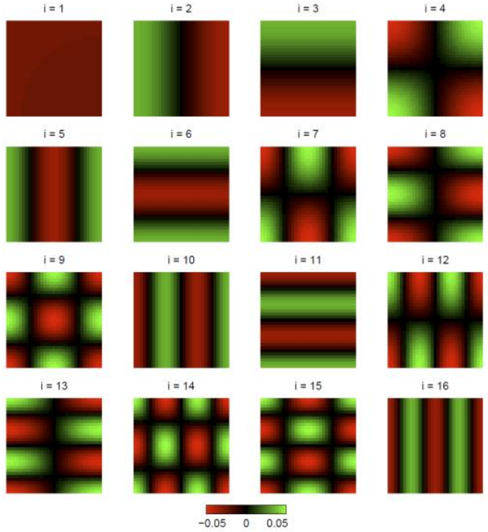
$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

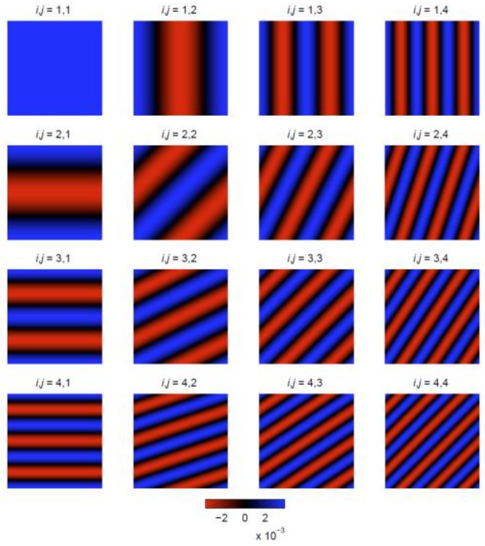
$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

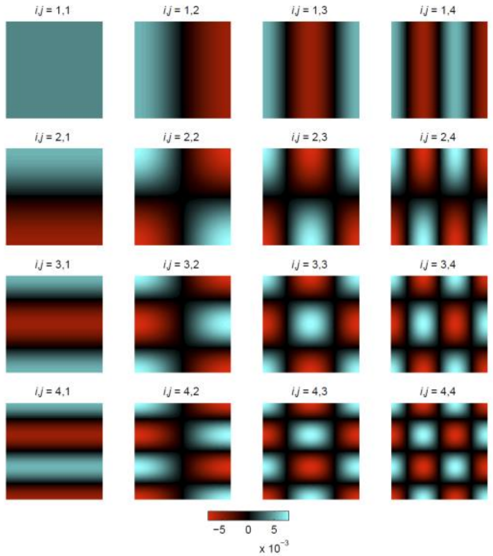
“Sistema de Coordenadas” para Imágenes

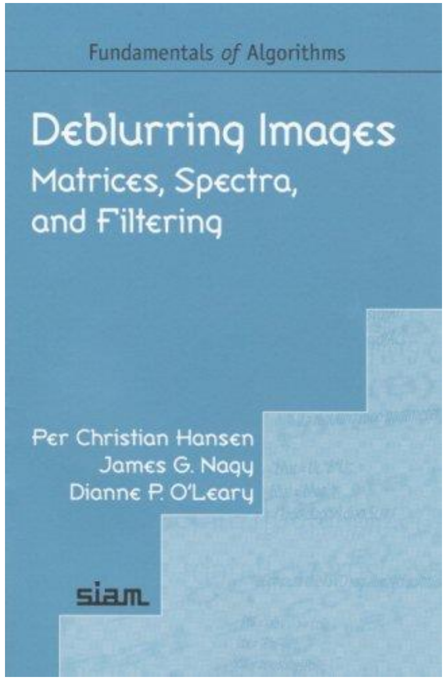












Ingrid Daubechies

Desarrolló "sistemas de coordenadas" muy especiales que se llaman Daubechies Wavelets. Este sistema de coordenadas nos permite comprimir imágenes, videos y música.

“Deblurring” de una Imagen

Imagen
Verdadera

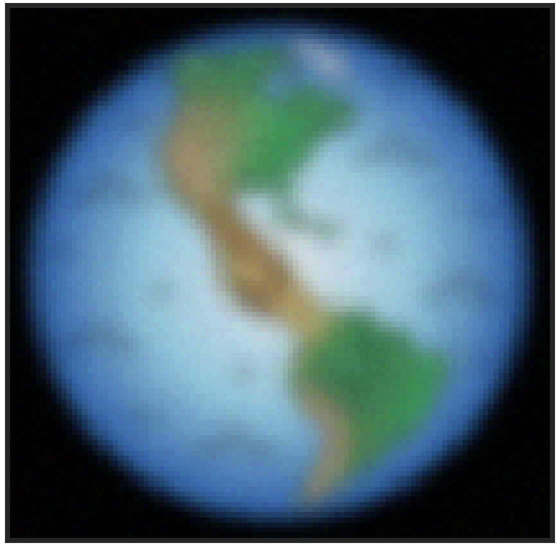


Imagen borrosa y ruidosa

Problema de deblurring de imagen: Intenta reconstruir la imagen verdadera a partir de una borrosa y ruidosa.

Sistema de Ecuaciones

Si a, c, d, e, b_1 y b_2 son conocidos, tenemos un sistema de ecuaciones

$$ax_1 + cx_2 = b_1$$
$$dx_1 + ex_2 = b_2$$

Ejemplo:

$$3x_1 + 6x_2 = 12$$
$$5x_1 + 10x_2 = 24$$

Sistema de Ecuaciones Mal Condicionado

Comparar

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + \qquad\quad x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2.0001x_2 &= 2 \end{aligned}}$$

Solucion exacta : $x_1 = 1, x_2 = 0,$

con un sistema muy parecido

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + \qquad\quad x_2 &= .99 \\ 2x_1 + 2.0001x_2 &= 1.89 \end{aligned}}$$

Solucion exacta (redondeada) : $x_1 = 900, x_2 = -899.$

Métodos Regularizantes

Sistema original

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + \quad\quad\quad x_2 &= .99 \\ 2x_1 + 2.0001x_2 &= 1.89 \end{aligned}}$$

$$\text{Solucion exacta (redondeada)}: x_1 = 900, x_2 = -899,$$

$$\text{Solucion deseada}: x_1 = 1, x_2 = 0,$$

Sistema regularizado

$$\boxed{\begin{aligned} (1+\boxed{0.05})x_1 + \quad\quad\quad\quad\quad\quad x_2 &= .99 \\ 2x_1 + (2.0001+\boxed{0.05})x_2 &= 1.89 \end{aligned}}$$

$$\text{Solucion exacta (redondeada)}: x_1 = .91, x_2 = .03.$$

... la solucion del sistema regularizado esta mas cerca de la solucion deseada.

Sistema de Ecuaciones en Forma Matricial

Podemos escribir el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad\quad x_2 &= .99 \\ 2x_1 + 2.0001x_2 &= 1.89 \end{aligned}$$

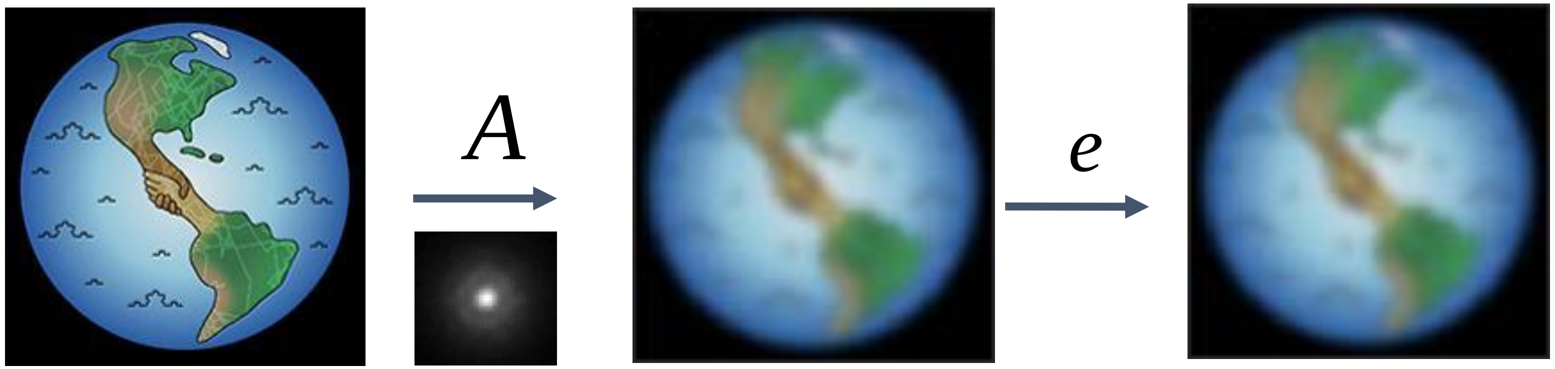
como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2.0001 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} .99 \\ 1.89 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$A \quad x = b$$

Matriz

“Deblurring” de una Imagen: Modelo Matematico



x^{true} b^{true} b

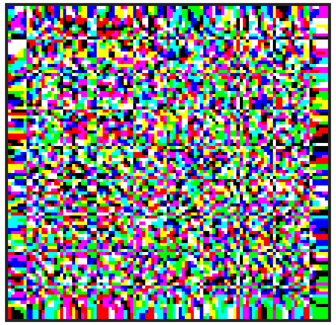
$$Ax = b^{true} + e = b$$

Problema de deblurring de imagen: Intenta reconstruir la imagen verdadera a partir de una borrosa y ruidosa.

La Solucion Naïve

$$x^{true}\,? \xleftarrow{\;A^{-1}\;} b$$

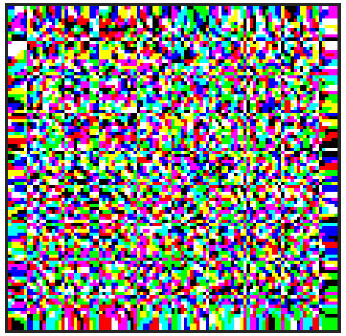
...pero $x = A^{-1}b =$



El deblurring de imágenes es un problema inverso mal condicionado: pequeñas perturbaciones en los datos pueden dar lugar a grandes errores en la solución.

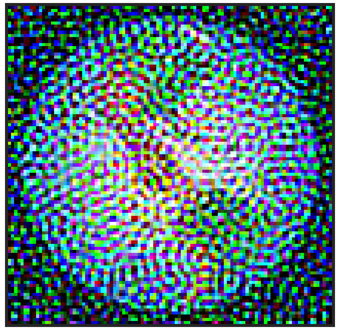
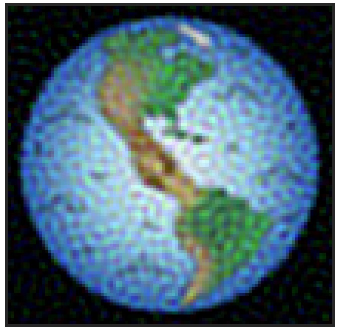
Solucion Regularizada

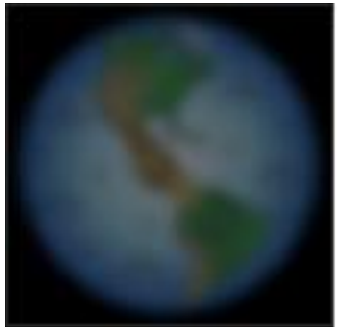
$$A^{-1}$$



$$(A+\lambda I)^{-1}$$

¿Qué tan importante es λ ?

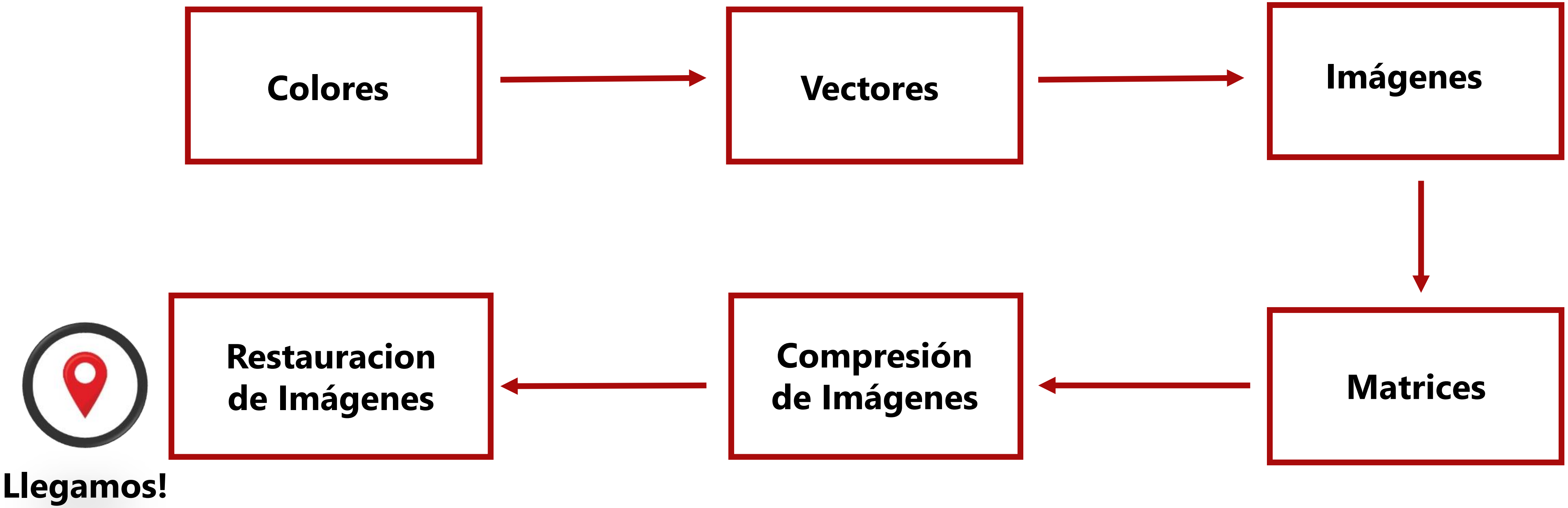





Elegir λ bien es muy importante!

Existe toda una área de investigación sólo para desarrollar formas de encontrar valores óptimos de λ.

El plan


Colores
Vectores
Imágenes
Matrices
Compresión de Imágenes
Restauracion de Imágenes
Llegamos!