Re-Imaginando el Mundo a través del Algebra Lineal

Malena I. Espanol
Docente en Matemática Computacional

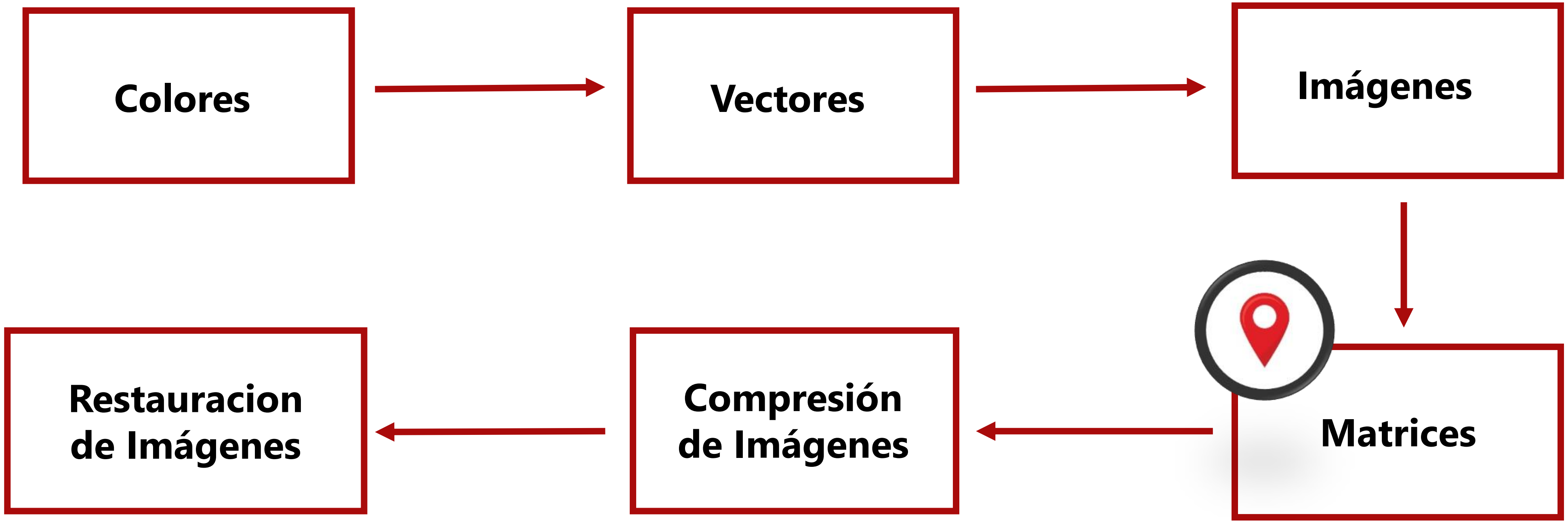
Victoria Uribe
Estudiante Doctoral de Matemática Aplicada

Facultad de Ciencias Matemáticas y Estadísticas
Arizona State University
malena.espanol@asu.edu

Mathematics Sin Fronteras
March10, 17, 24, 2021

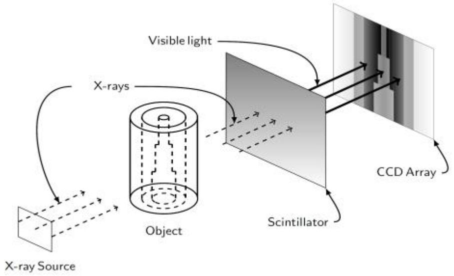
Arizona State University

El plan


Colores
Vectores
Imágenes
Matrices
Compresión de Imágenes
Restauracion de Imágenes

¿Qué hago?

Matemática Aplicada



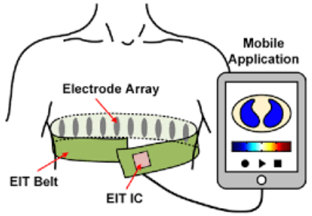
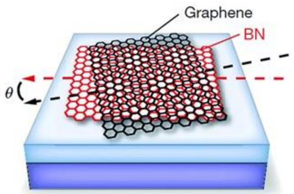
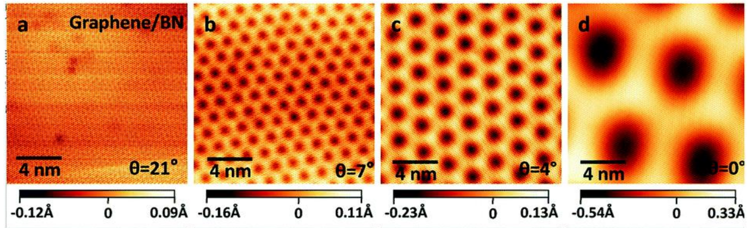
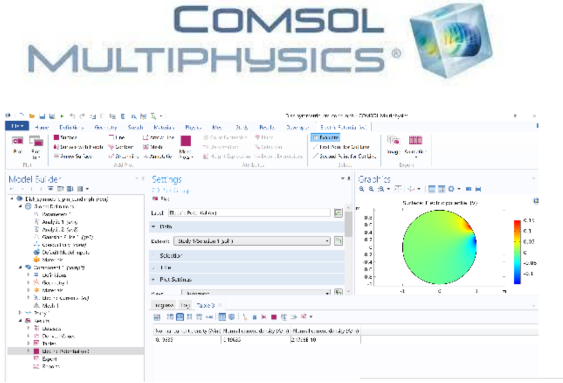


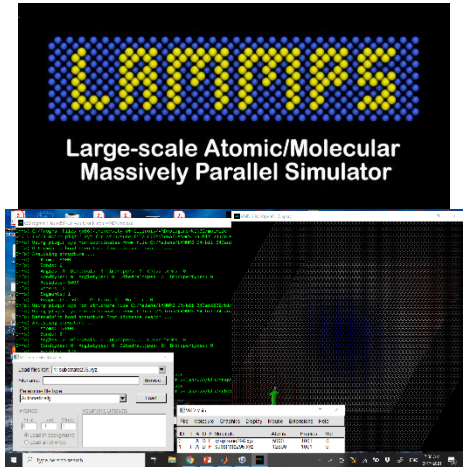
Fig. 1. Proposed wearable lung-health monitoring system.

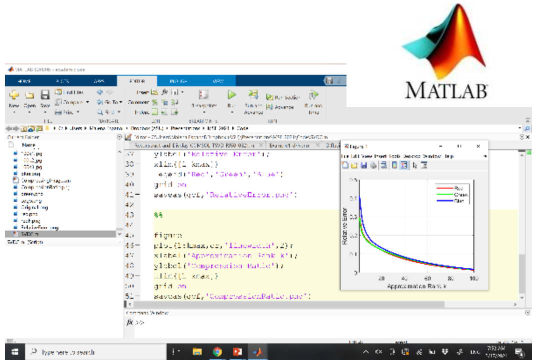




Matemática Computacional

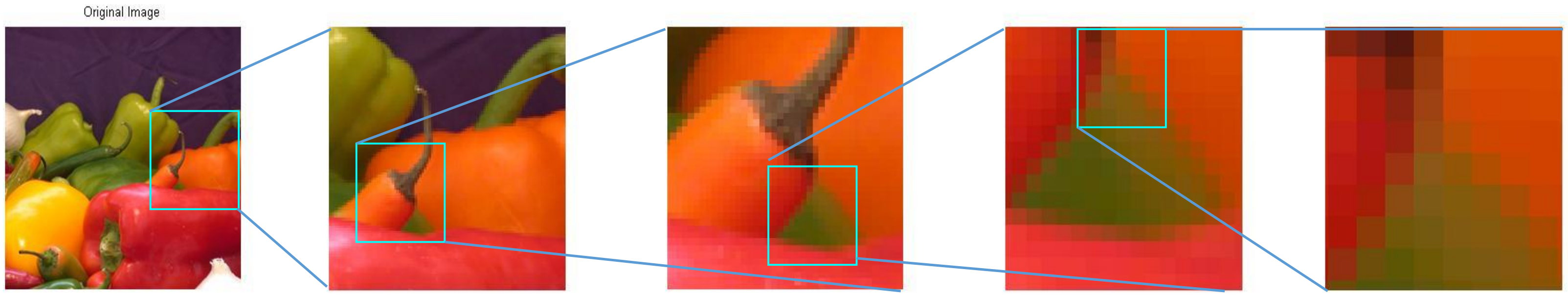


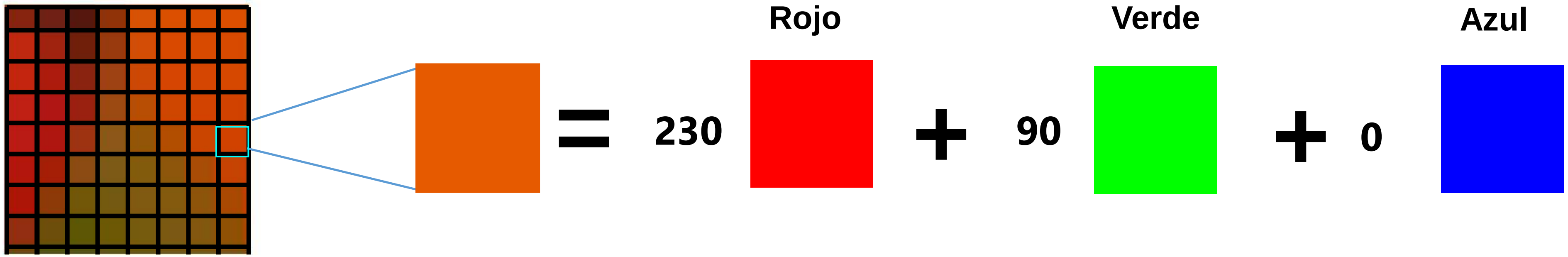




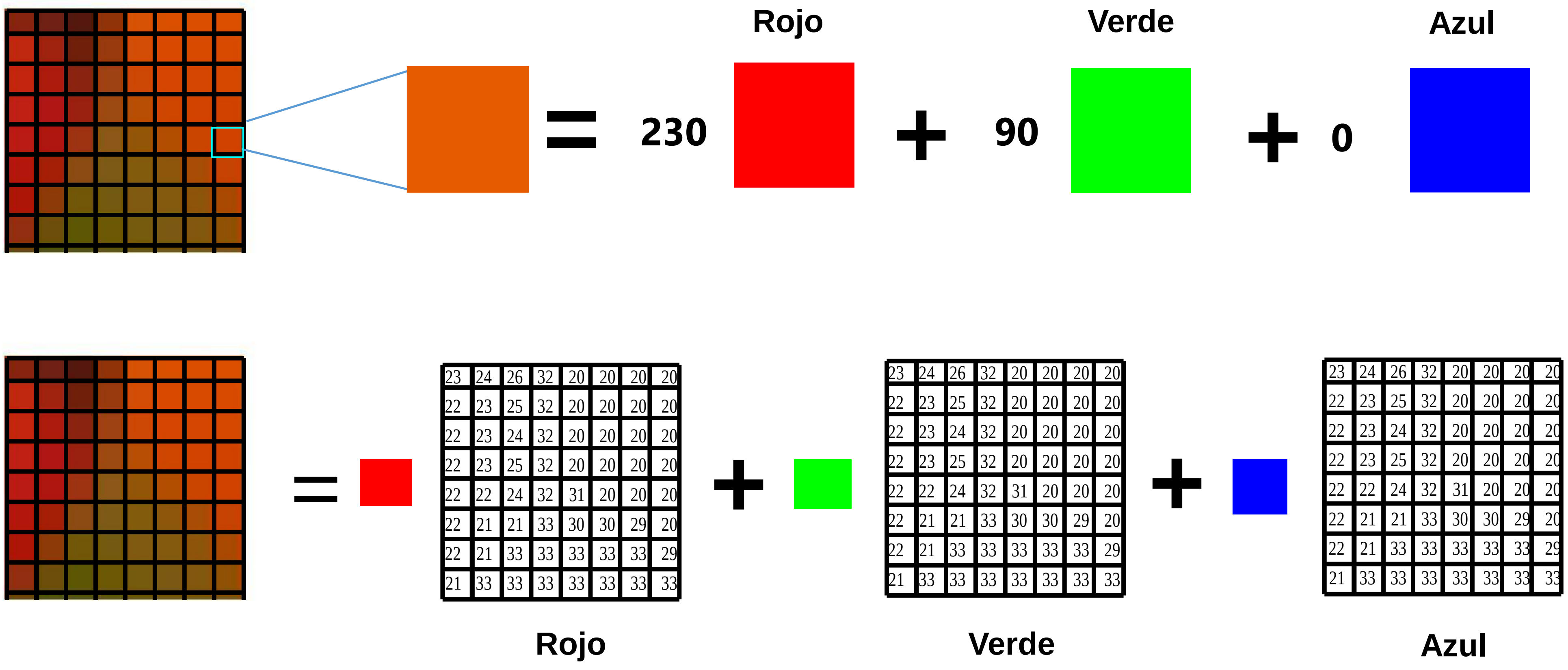
1. Almacenamiento
2. Costo Computacional
3. Precisión

Imágenes Digitales





Imágenes Digitales



Rojo

23	24	26	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	23	24	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	22	24	32	31	20	20	20
22	21	21	33	30	30	29	20
22	21	33	33	33	33	33	29
21	33	33	33	33	33	33	33

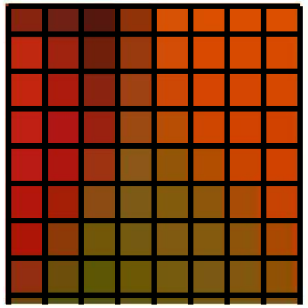
Verde

23	24	26	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	23	24	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	22	24	32	31	20	20	20
22	21	21	33	30	30	29	20
22	21	33	33	33	33	33	29
21	33	33	33	33	33	33	33

Azul

23	24	26	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	23	24	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	22	24	32	31	20	20	20
22	21	21	33	30	30	29	20
22	21	33	33	33	33	33	29
21	33	33	33	33	33	33	33

Almacenamiento de Imágenes de tamaño mxn



=

23	24	26	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	23	24	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	22	24	32	31	20	20	20
22	21	21	33	30	30	29	20
22	21	33	33	33	33	33	29
21	33	33	33	33	33	33	33

Rojo

+

23	24	26	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	23	24	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	22	24	32	31	20	20	20
22	21	21	33	30	30	29	20
22	21	33	33	33	33	33	29
21	33	33	33	33	33	33	33

Verde

+

23	24	26	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	23	24	32	20	20	20	20
22	23	25	32	20	20	20	20
22	22	24	32	31	20	20	20
22	21	21	33	30	30	29	20
22	21	33	33	33	33	33	29
21	33	33	33	33	33	33	33

Azul

Necesitamos almacenar $m \times n$ números entre el 0 y 255 para cada color. Entonces, para almacenar una imagen necesitamos 3mn bytes.

¿Qué podemos hacer para reducir el almacenamiento?

Matrices

Definición: Una matriz es una tabla ordenada de números

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

La transpuesta de una matriz

Definición: La transpuesta de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que se anota $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ está dada por $A^T_{ij} = A_{ji}$, es decir,

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Entonces $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

Matrices Simétrica

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica si $A^T = A$, that is,

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

¿Cuál es el costo de almacenar matrices simétricas?

Matrices Toeplitz

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el costo de almacenar matrices Toeplitz?

Matrices Circulares

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & & c_2 \\ \vdots & c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el costo de almacenar matrices circulares?

Suma de Matrices

Definición: La suma de dos matrices de igual tamaño se define como

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el costo de calcular una suma?

Suma de Matrices Estructuradas

1) ¿La suma de dos matrices simétricas es simétrica?
2) ¿La suma de dos matrices Toeplitz es Toeplitz?
3) ¿La suma de dos matrices circulares es circular?

Producto por un escalar

Definición: El producto de un escalar k por la matriz A se define como

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 5 & 7 & 12 \\ 5 & 9 & 14 \end{pmatrix}$

¿Cuál es el costo de calcular esta matriz?

Producto Matriz-Vector – Primera forma

Definición: Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $u \in \mathbb{R}^n$. El *producto matriz-vector* de A y u está definido como

$$Au = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ \text{---} & a_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_m & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot u \\ a_2 \cdot u \\ \vdots \\ a_n \cdot u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Ejemplo:

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 5 + 2\times 10 \\ 3\times 5 + 4\times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 55 \end{pmatrix}$$

Producto Matriz-Vector – Segunda forma

Definición: Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $u \in \mathbb{R}^n$. El *producto matriz-vector* de A y u está definido como

$$Au = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$= u_1 \begin{pmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{pmatrix} + \cdots + u_n \begin{pmatrix} | \\ a_n \\ | \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $Au = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 55 \end{pmatrix}$

Producto Matriz-Matriz – Primera forma

Definición: Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. El *producto matriz-matriz* de A y B está dado por

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 55 & 24 \end{pmatrix}$

Producto Matriz-Matriz – Segunda forma

Definición: Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. El *producto matriz-matriz* de A y B está dado por

$$AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & b_1 & — \\ & \vdots & \\ — & b_n & — \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & b_1 & — \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} | \\ a_n \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & b_n & — \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 12 \\ 55 & 24 \end{pmatrix}$

Descomposición en valores singulares (SVD)

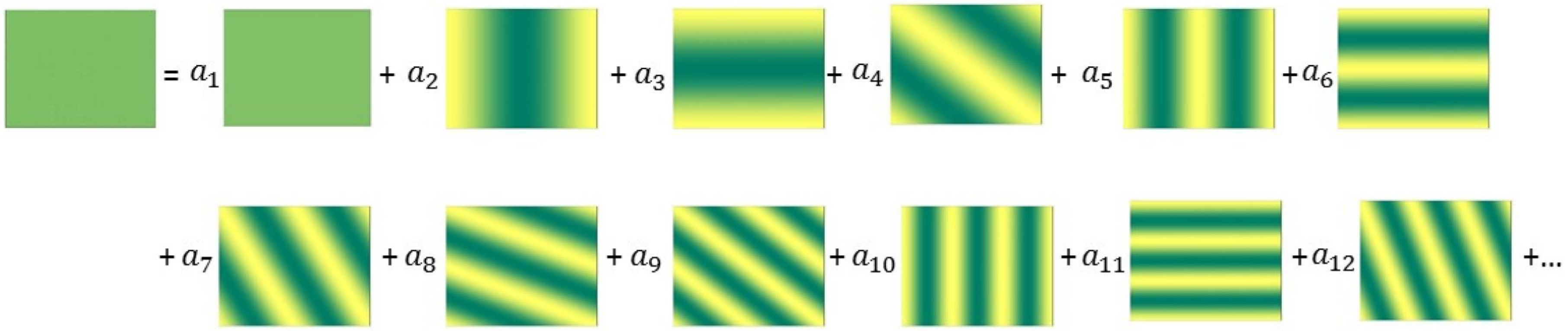
Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces, existen matrices $U \in \mathbb{R}^{n\times n}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $U^TU = V^TV = I_n$, y $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\mathrm{n})$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$, tales que $A = U\Sigma V^T$. Las columnas de U se llaman los vectores singulares izquierdos, las columnas de V los vectores singulares derechos, is σ_i se llaman valores singulares.

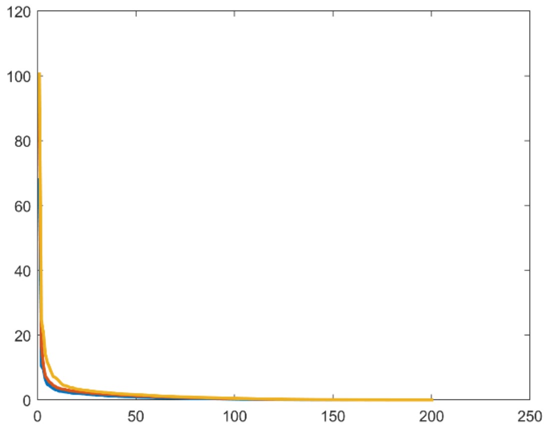
$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & v_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & v_n^T & — \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & \sigma_1 v_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & \sigma_n v_n^T & — \end{pmatrix} = \Sigma_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T$$

El SVD de una imagen

$$A = U\Sigma V^T = \Sigma_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T$$





SVD Truncado

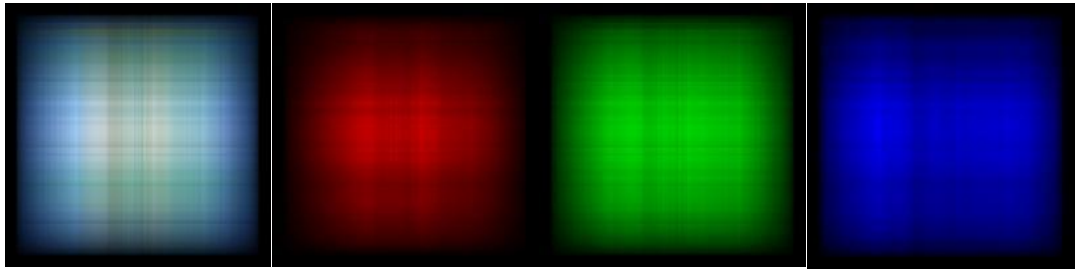
$$A_k = U_k \Sigma_k V_k^T = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_k \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & v_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & v_k^T & — \end{pmatrix} = \Sigma_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

¿Cuál es el costo de almacenar estas matrices?

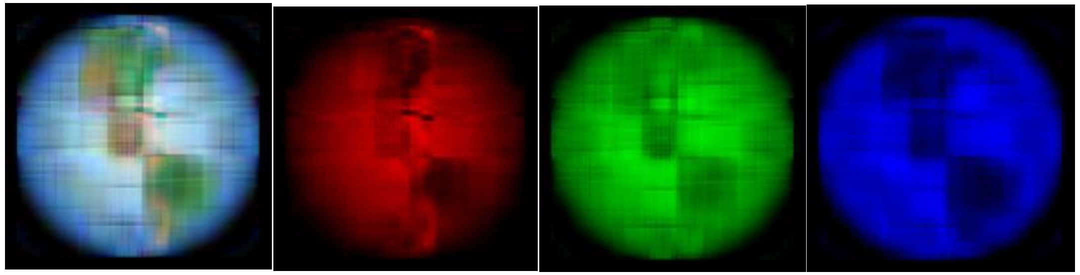
¿Cuál es el costo de calcular la matriz Ak?

Compresión de imágenes mediante SVD

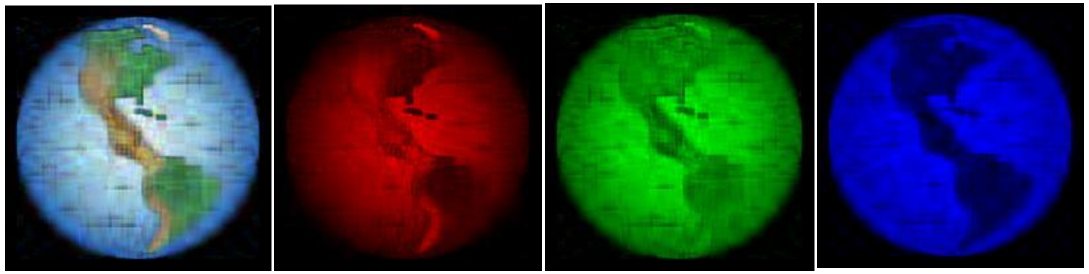
k=1



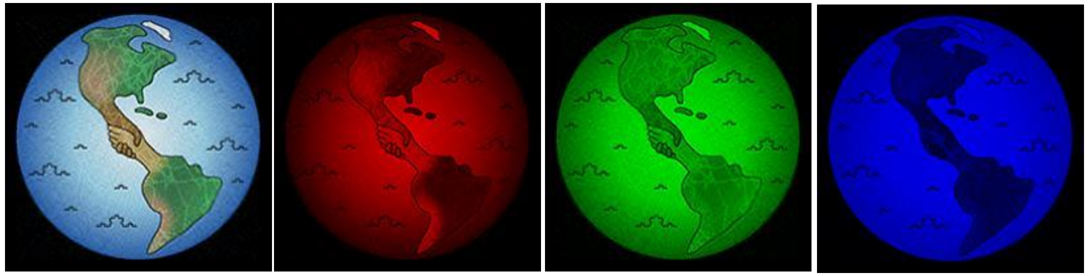
k=5



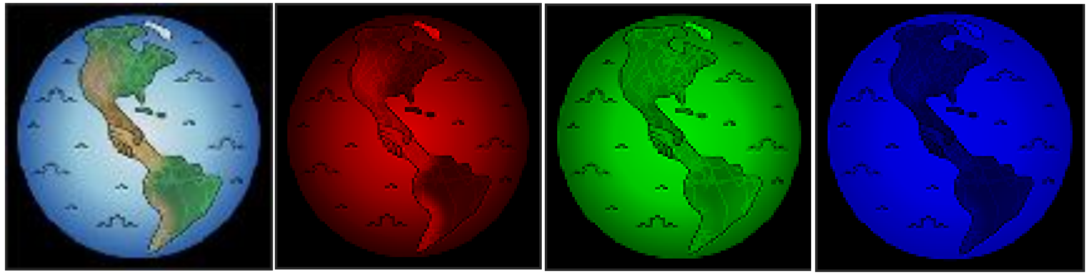
k=10



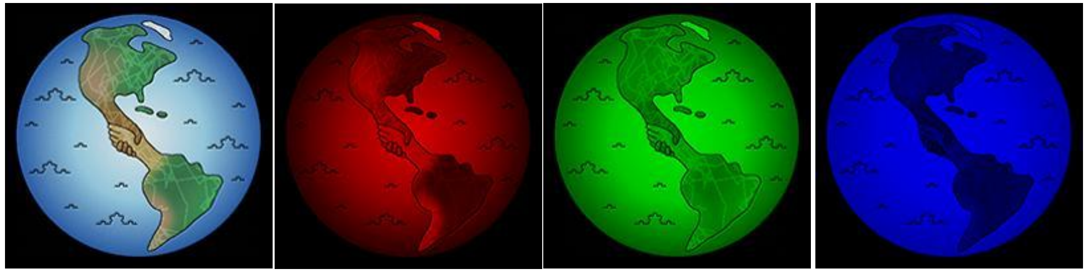
k=50



k=100



k=256



Normas de Matrices and Distancias

Definición: La *norma Frobenius* de una matriz A está definida por

$$\|A\|_F = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{mn}^2}$$

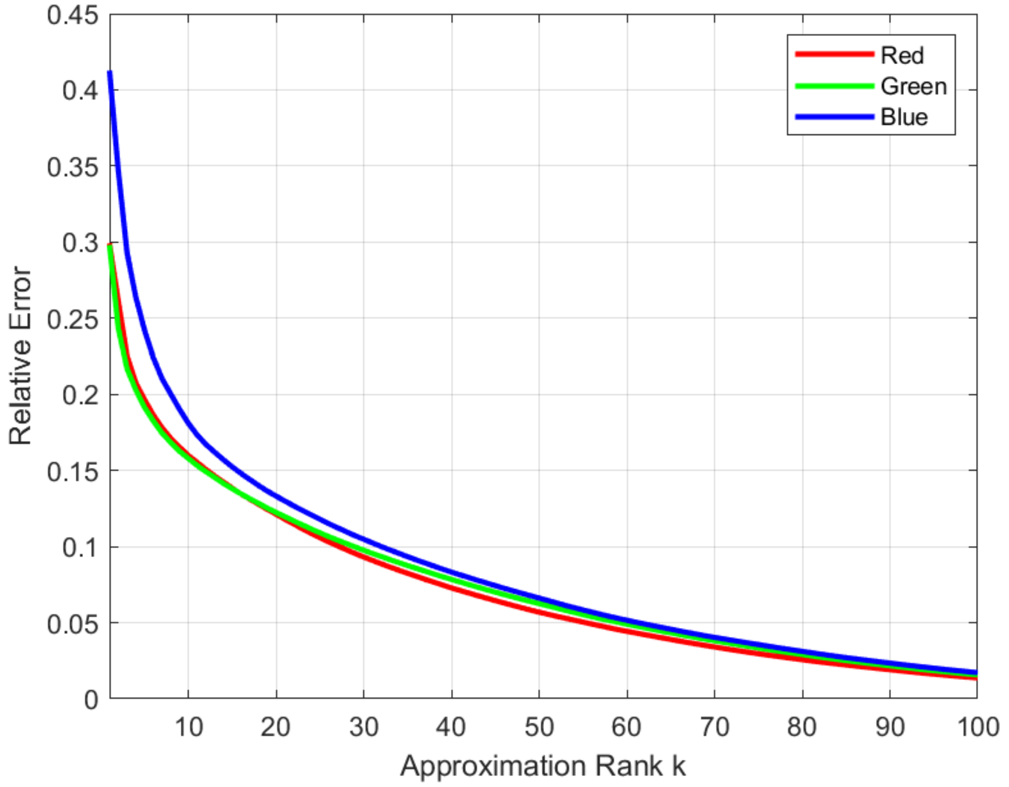
Ejemplos: $\left\|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\|_F = \sqrt{30}$ y $\left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\|_F = \sqrt{2}$

Definición: La *distancia de Frobenius* entre dos matrices A y B está definida por

$$d(A, B) = \|A - B\|_F = \sqrt{(a_{11} - b_{11})^2 + (a_{12} - b_{12})^2 + \cdots + (a_{mn} - b_{mn})^2}$$

Ejemplo: $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\|_F = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\right\|_F = \sqrt{22}$

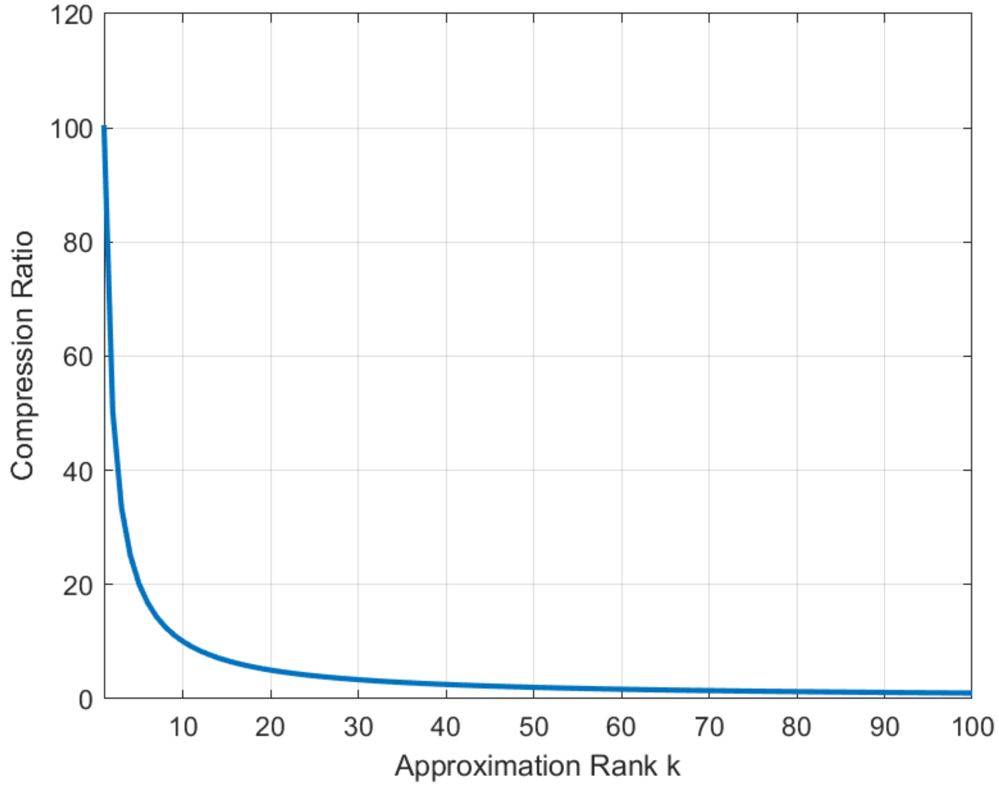
Compresión de imágenes : Error Relativo



Error Relativo:

$$\frac{\|A - A_k\|_F}{\|A\|_F}$$

Compresión de imágenes: Taza de Compresión

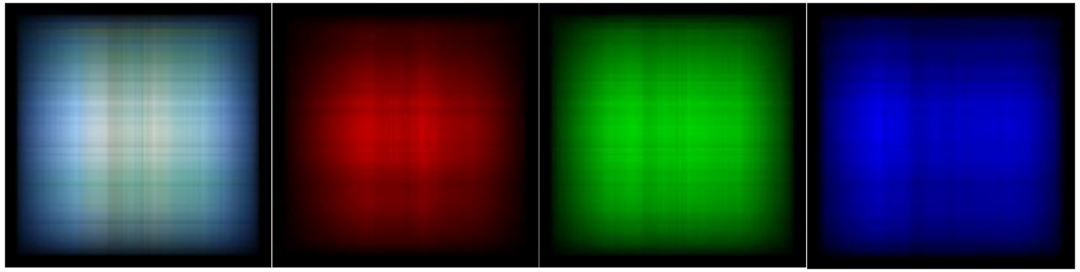


Taza de Compresión:

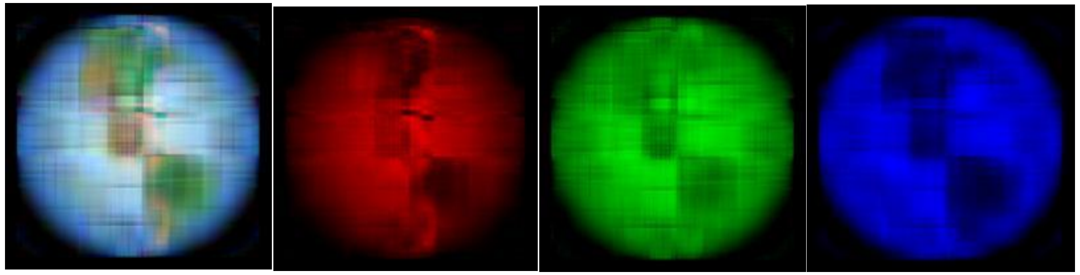
$$\frac{mn}{k(m+n+1)}$$

Compresión de imágenes mediante SVD

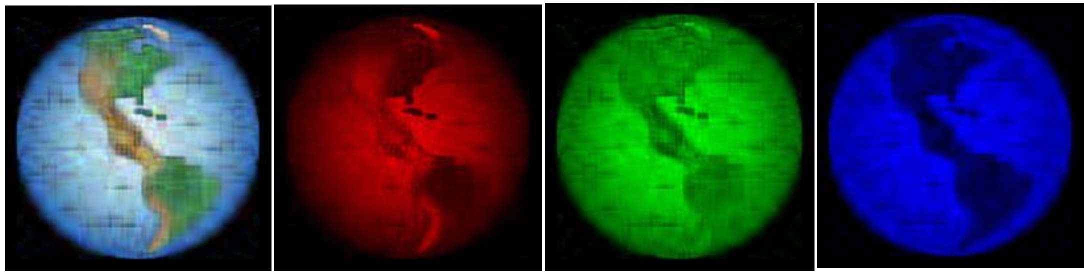
k=1



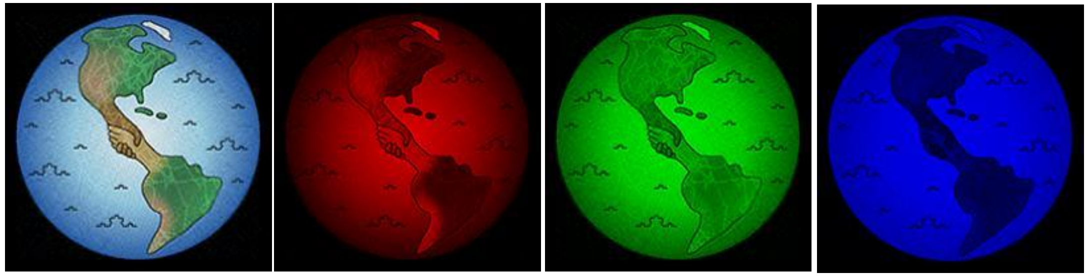
k=5



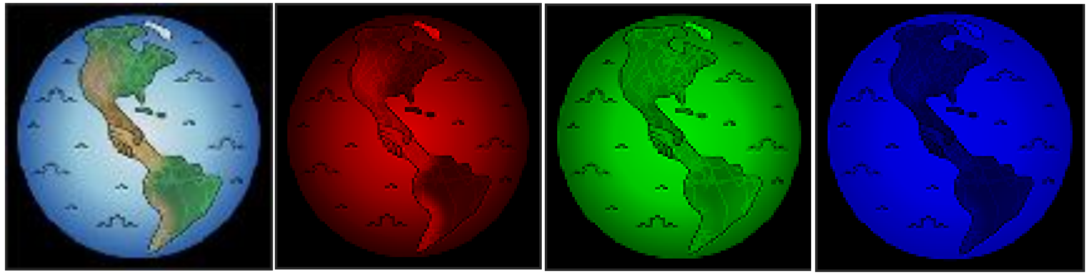
k=10



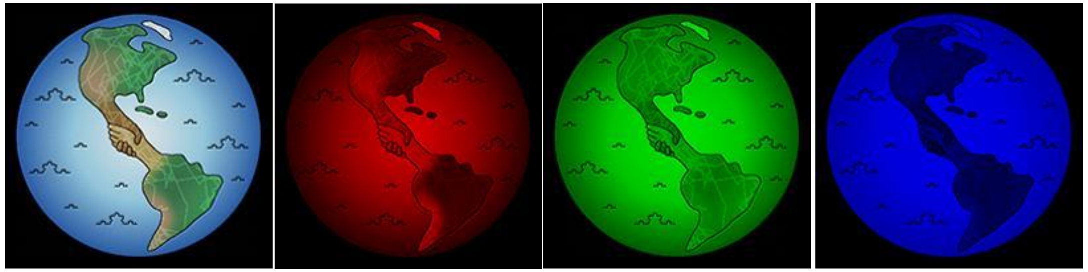
k=50



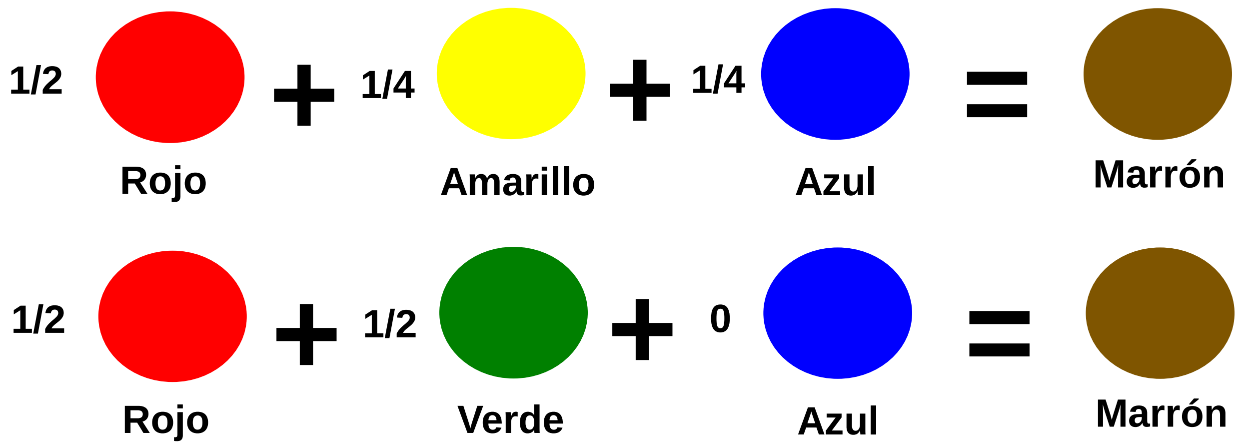
k=100

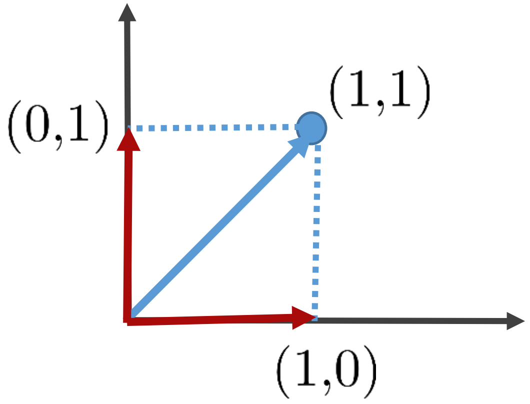


k=256

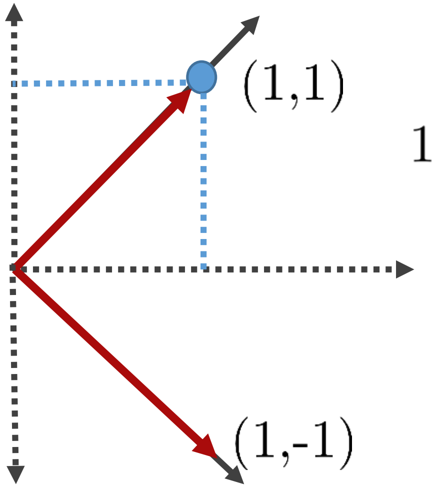


Sistema de Coordenadas





$$1\ (1{,}0) + 1\ (0{,}1) = (1{,}1)$$



$$1\ (1{,}1) + 0\ (1{,}\text{-}1) = (1{,}1)$$

Ingrid Daubechies

Desarrollo una herramienta matemática llamada “Wavelets de Daubechies” que llego a todos nuestros hogares.
Esta herramienta nos ayuda a comprimir imágenes, videos y música.