Re-Imaginando el Mundo a través del Algebra Lineal

Malena I. Espanol
Docente en Matemática Computacional

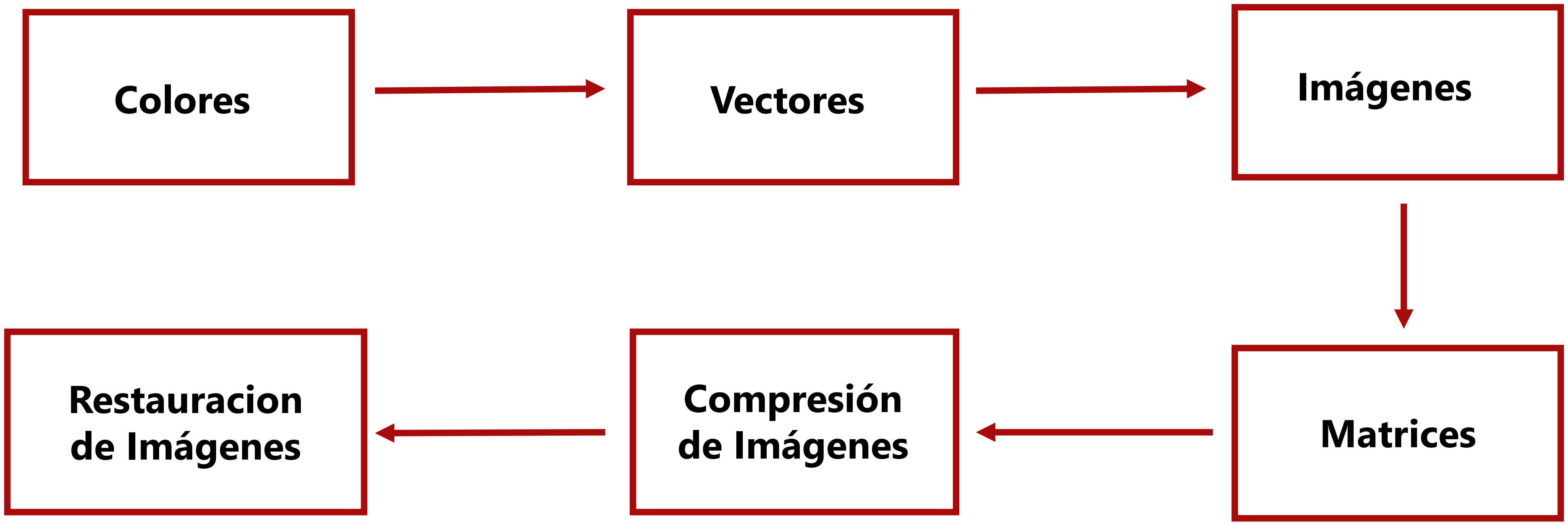
Victoria Uribe
Estudiante Doctoral de Matemática Aplicada

Facultad de Ciencias Matemáticas y Estadísticas
Arizona State University
malena.espanol@asu.edu

Mathematics Sin Fronteras
March10, 17, 24, 2021

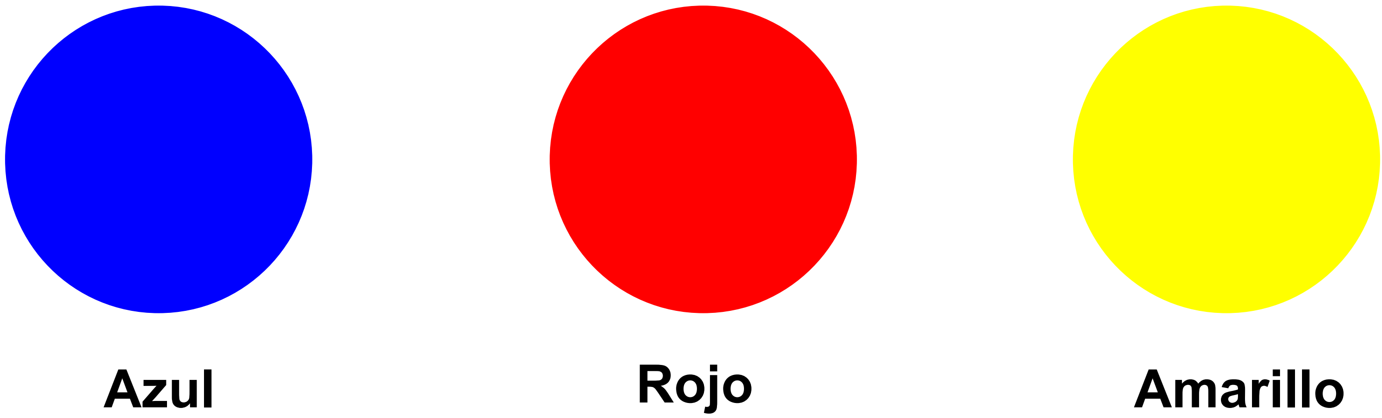
ASU Arizona State University

El plan


Colores
Vectores
Imágenes
Matrices
Compresión de Imágenes
Restauracion de Imágenes

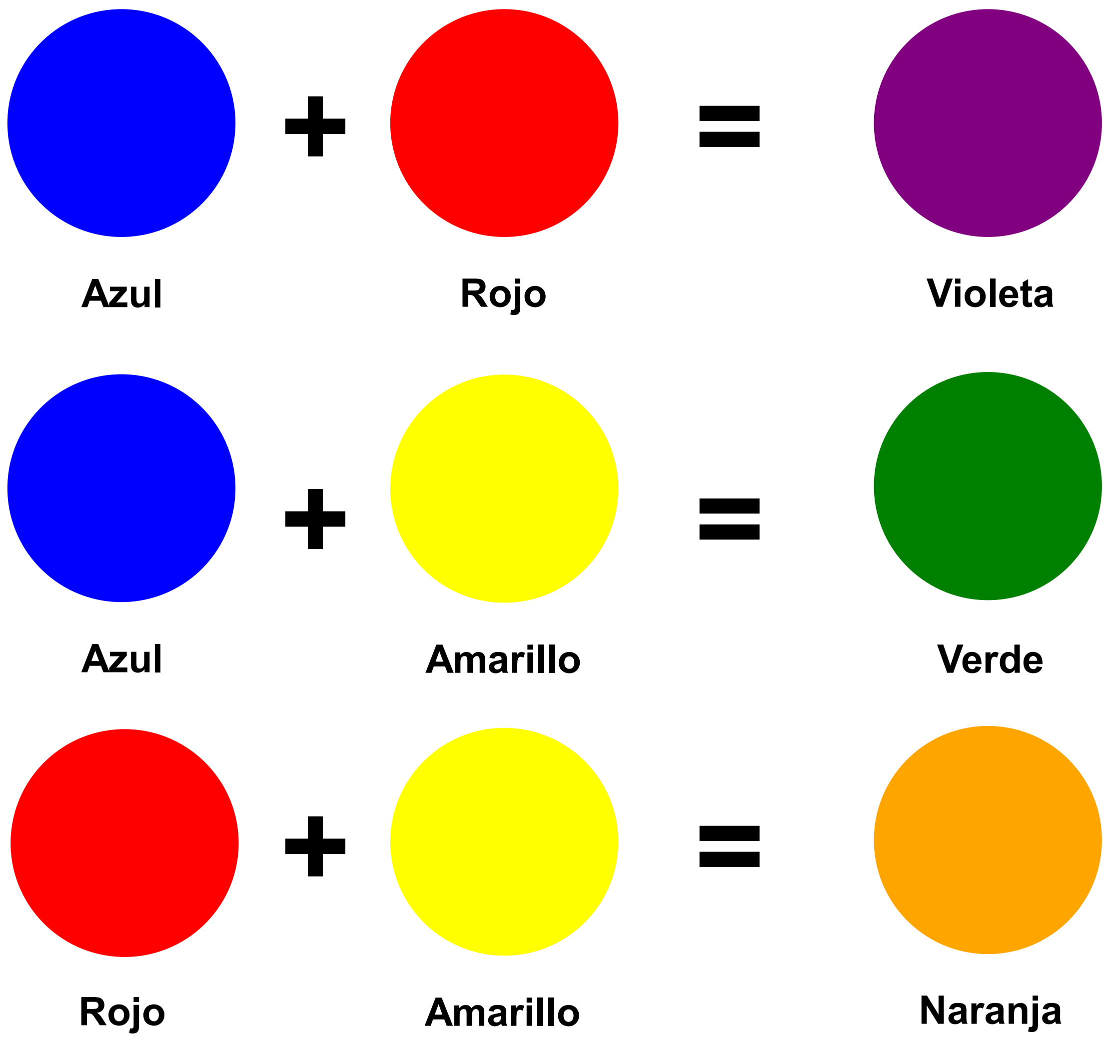
La matemática de los colores

Colores Primarios

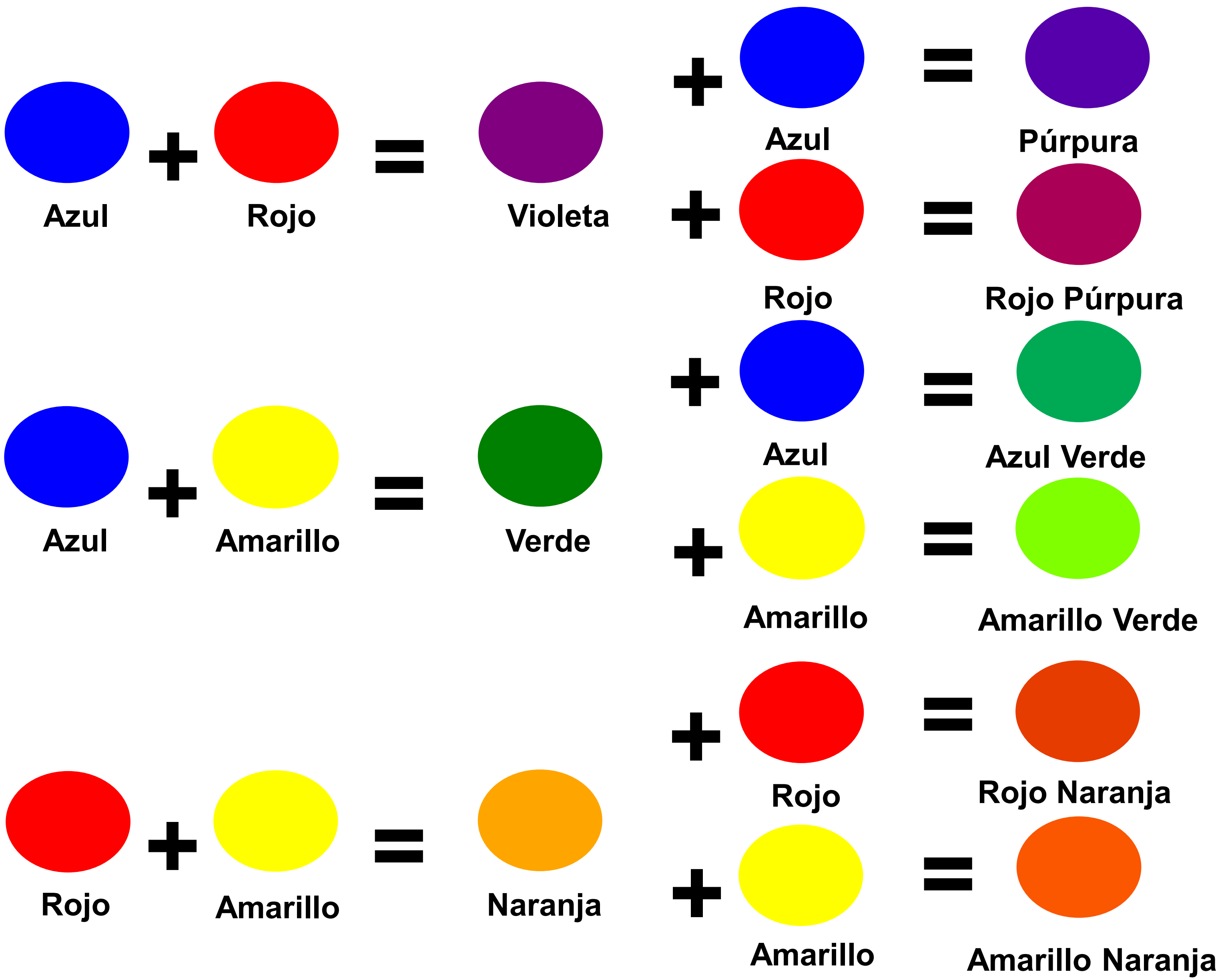


¿Por qué los llamamos así?

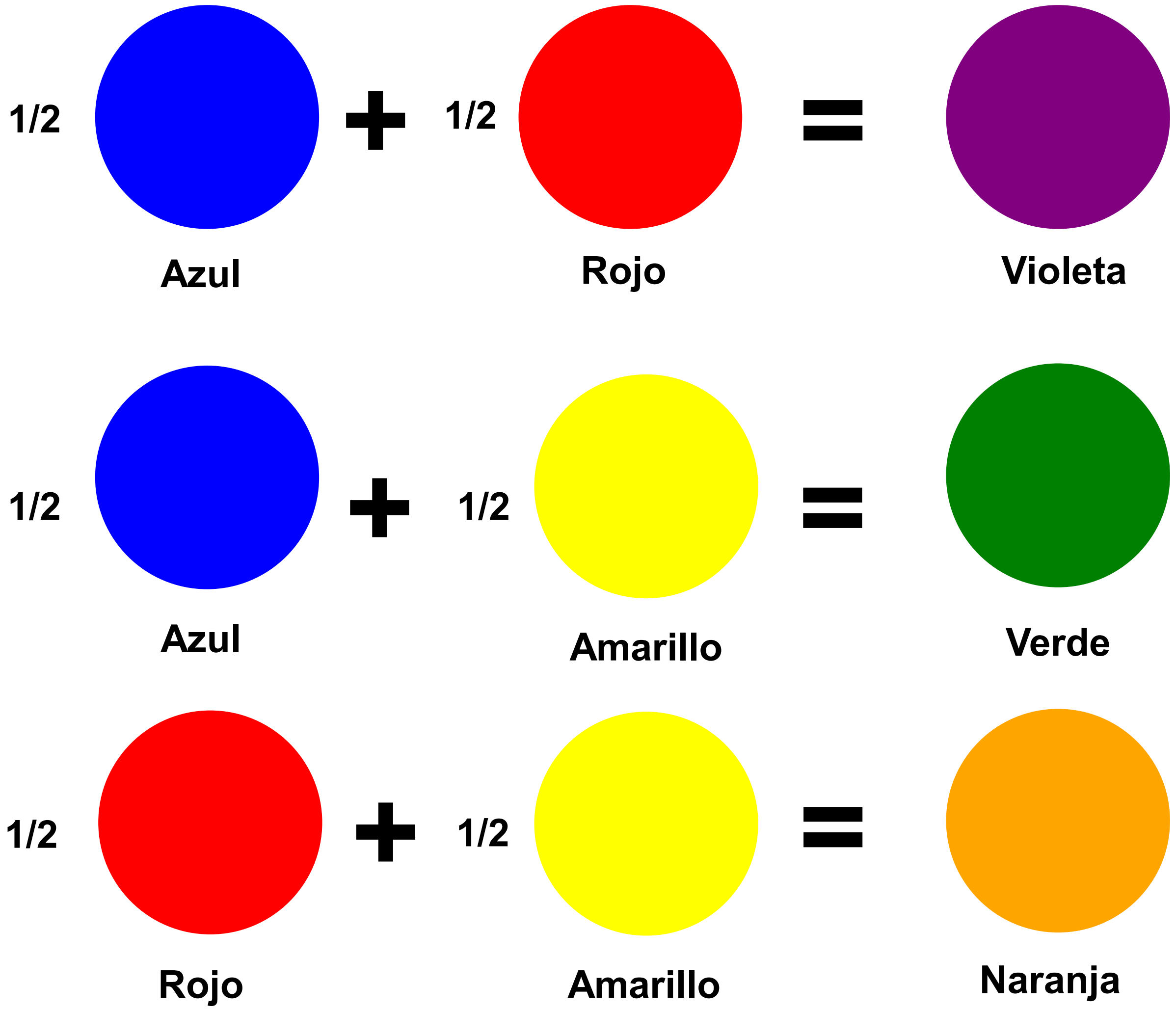
Colores Secundarios



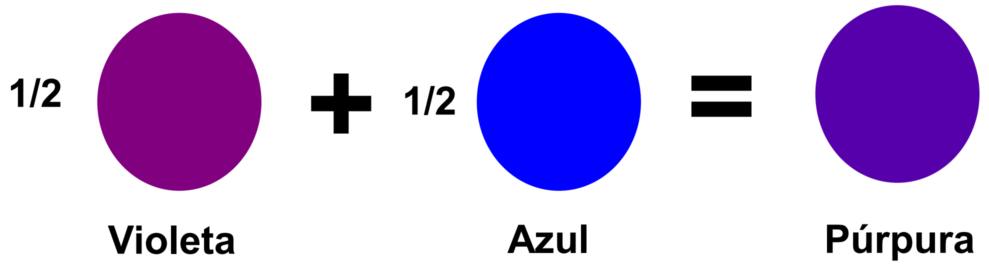
Colores Terciarios



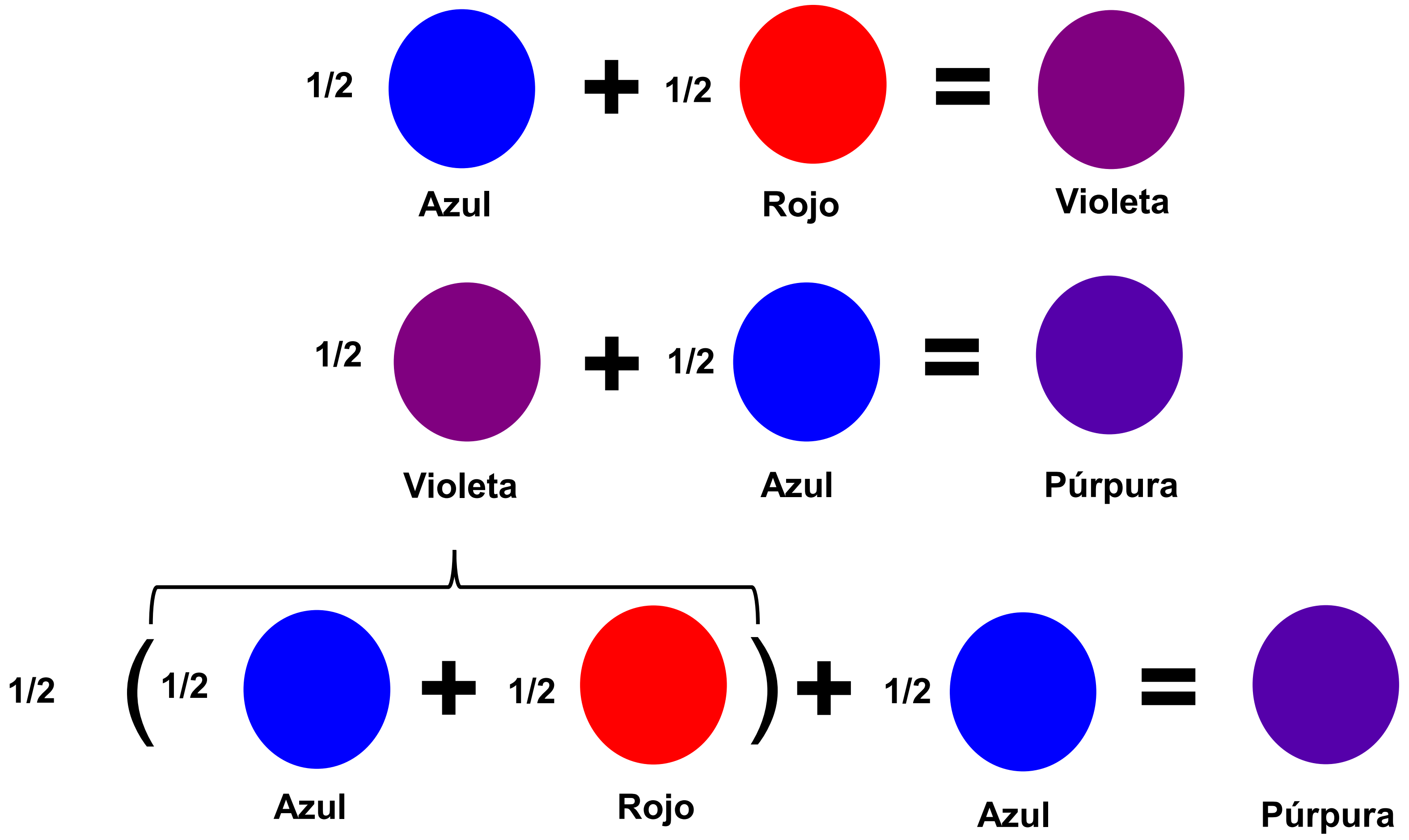
Receta de los Colores Secundarios



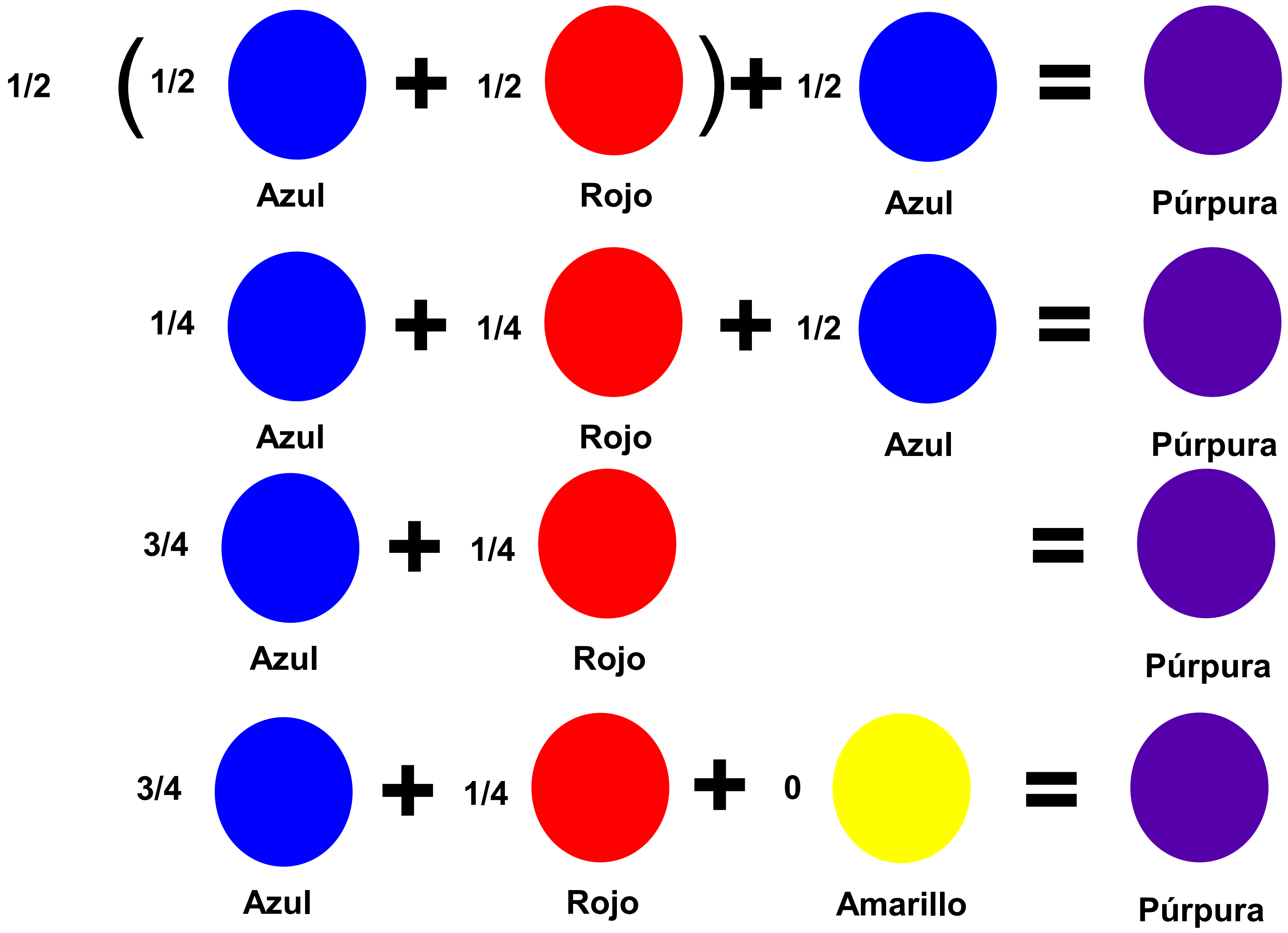
Receta del Color Púrpura



Receta del Color Púrpura



Receta del Color Púrpura

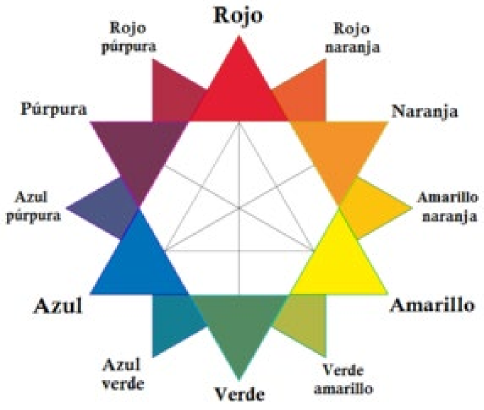


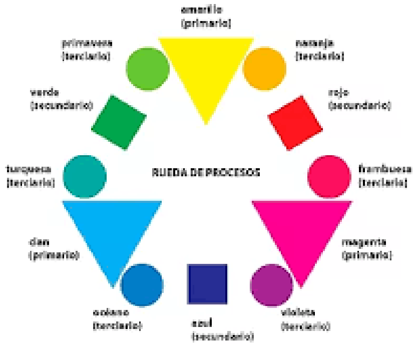
Receta de los Colores Terciarios

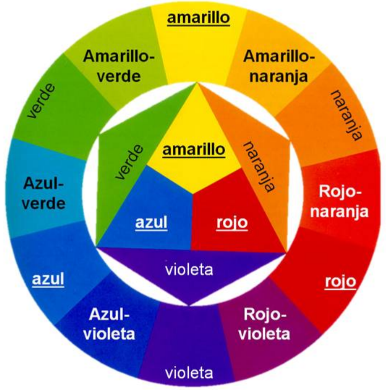
Azul		Rojo		Amarillo		Resultado
3/4	+	1/4	+	0	=	Púrpura
1/4	+	3/4	+	0	=	Rojo Púrpura
3/4	+	0	+	1/4	=	Azul Verde
1/4	+	0	+	3/4	=	Amarillo Verde
0	+	3/4	+	1/4	=	Rojo Naranja
0	+	1/4	+	3/4	=	Amarillo Naranja

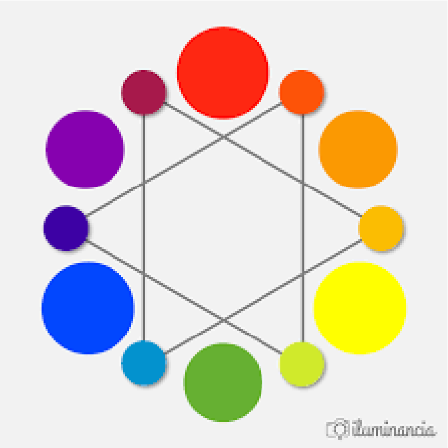
Rueda de Colores

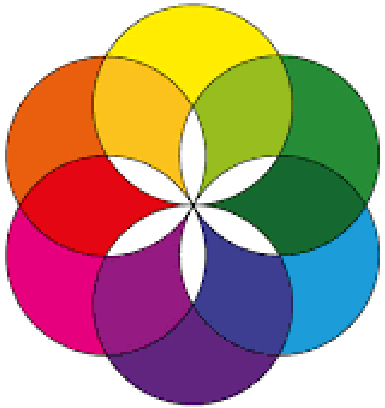
Rueda de R.J.B. Mérimée, 1830*





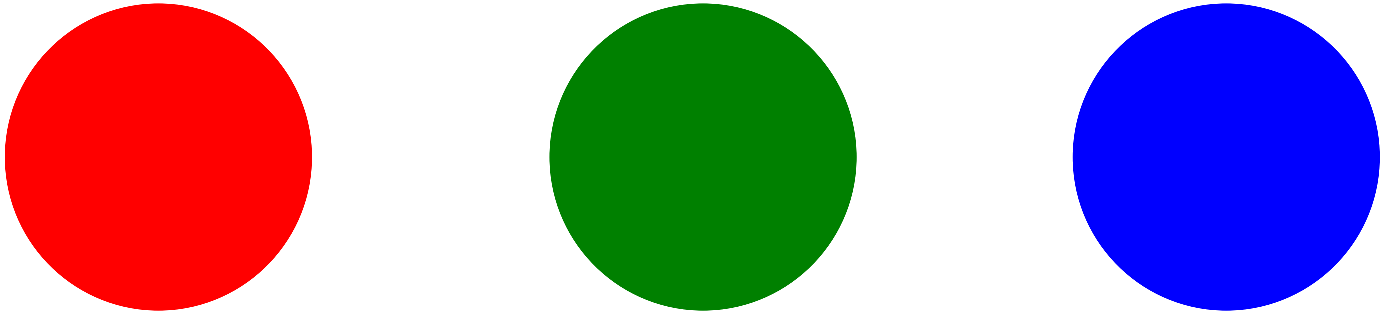






https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%ADrculo_crom%C3%A1tico

Colores Primarios de la Luz



Rojo
(Red)

Verde
(Green)

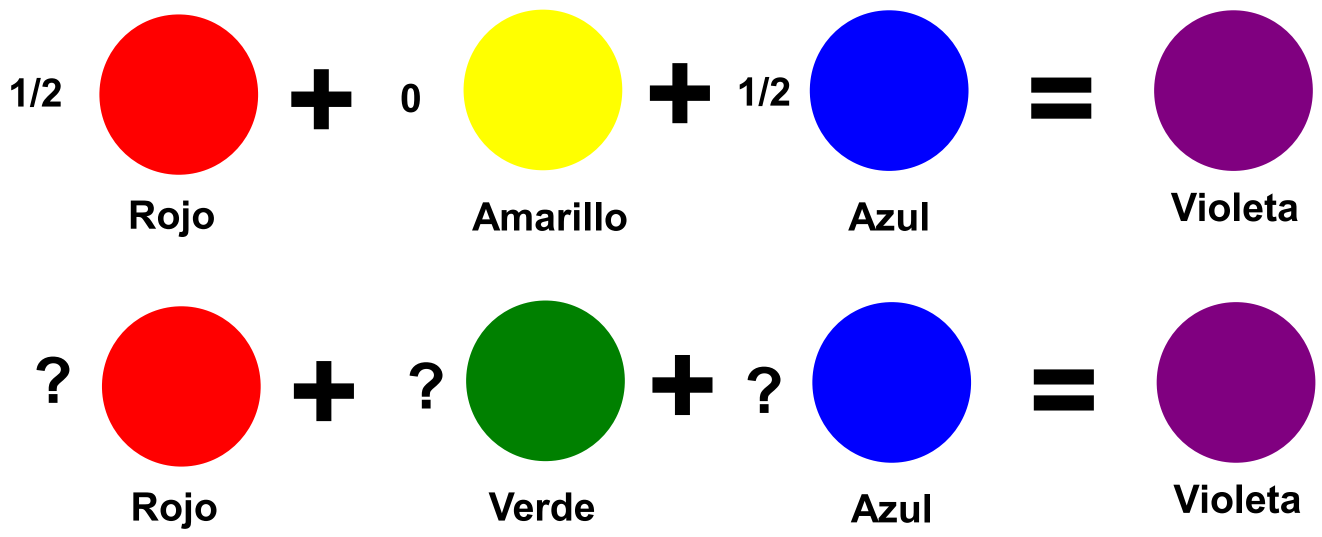
Azul
(Blue)

RGB

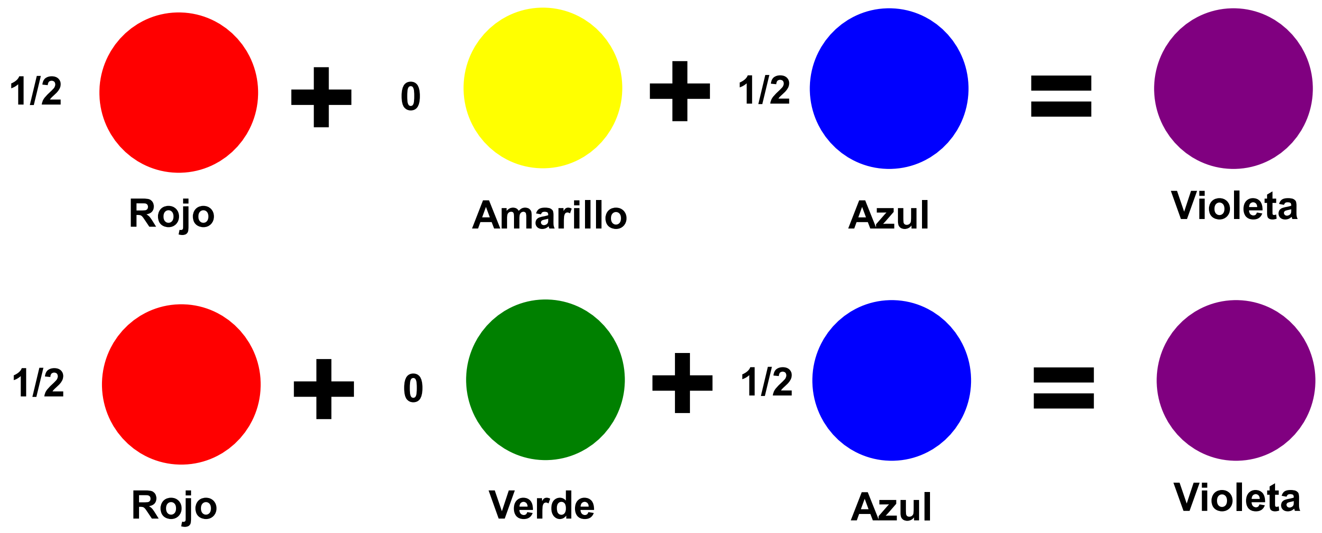
Se usa en los monitores, televisores y proyectores de cine

https://es.wikipedia.org/wiki/RGB

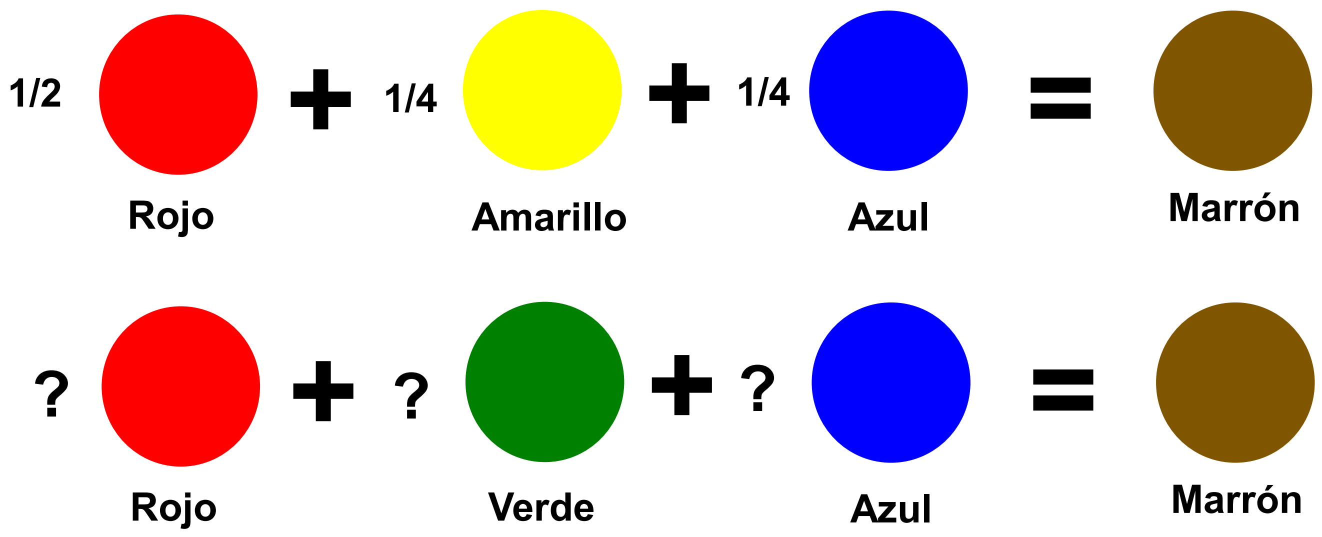
Creando Colores con RGB



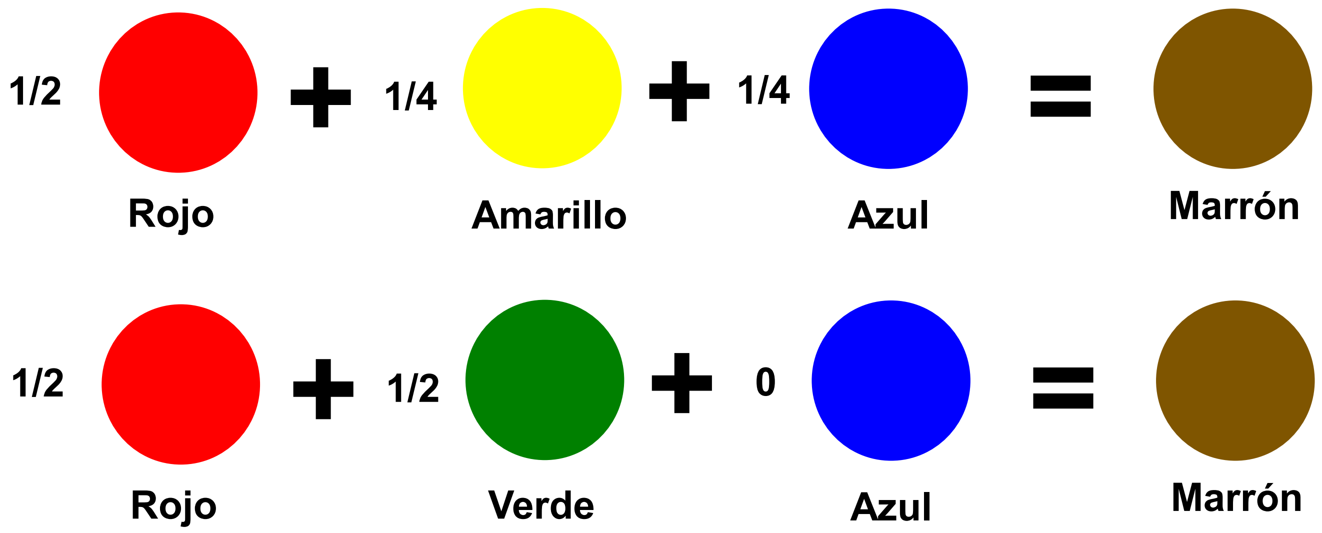
Creando Colores con RGB



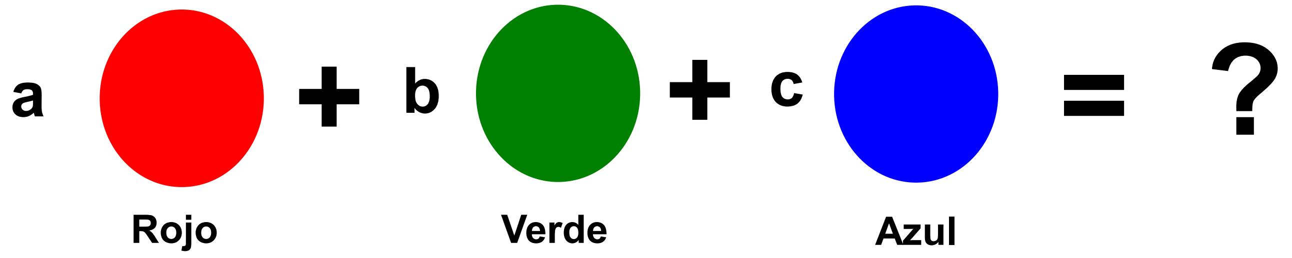
Creando Colores con RGB



Creando Colores con RGB



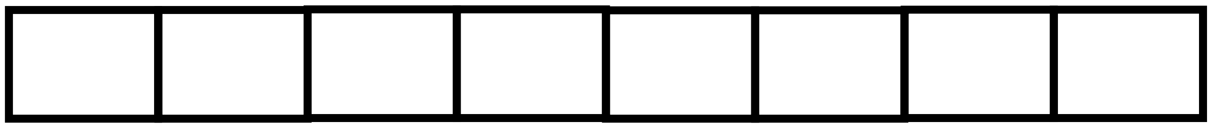
Creando Colores en la Compu



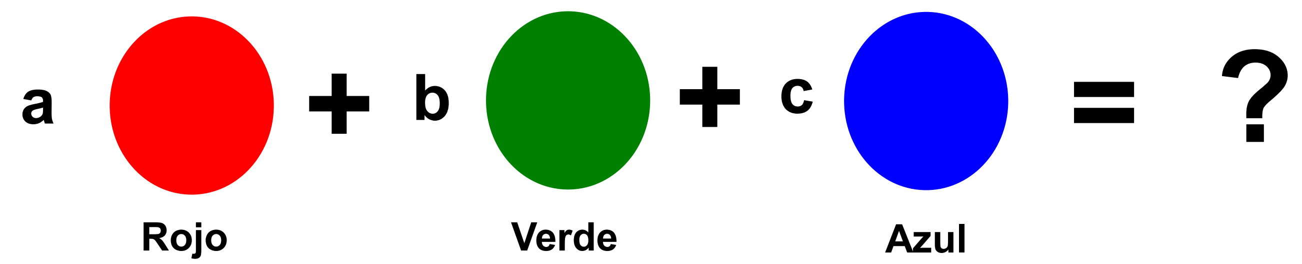
a, b, c son números

que solo pueden usar

1 byte = 8 bits

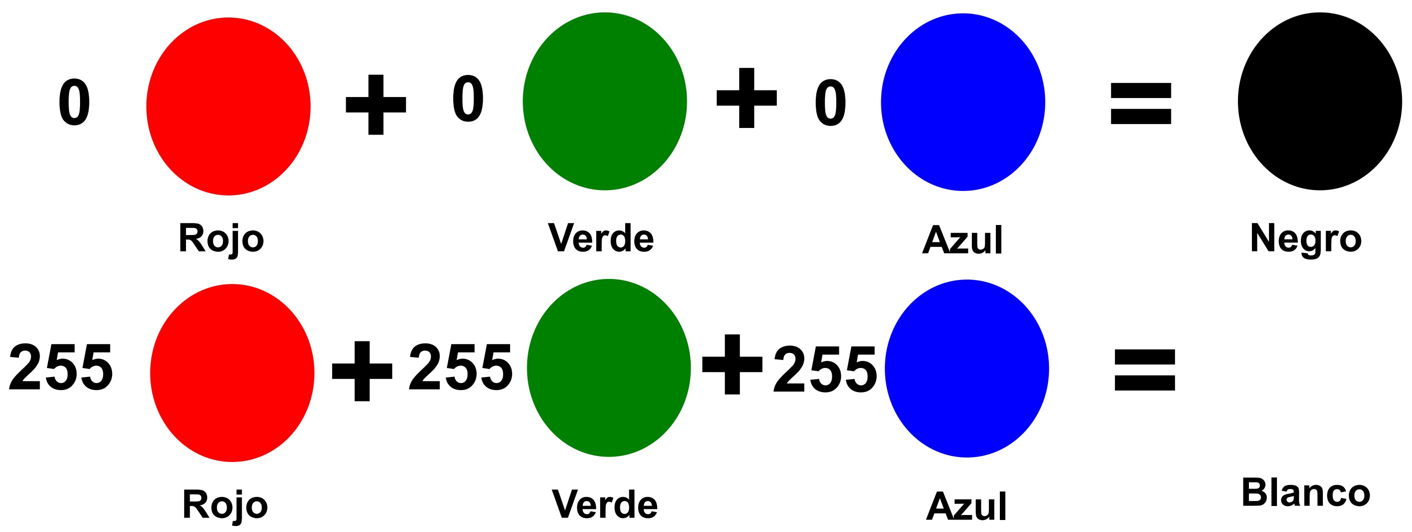


Creando Colores en la Computadora

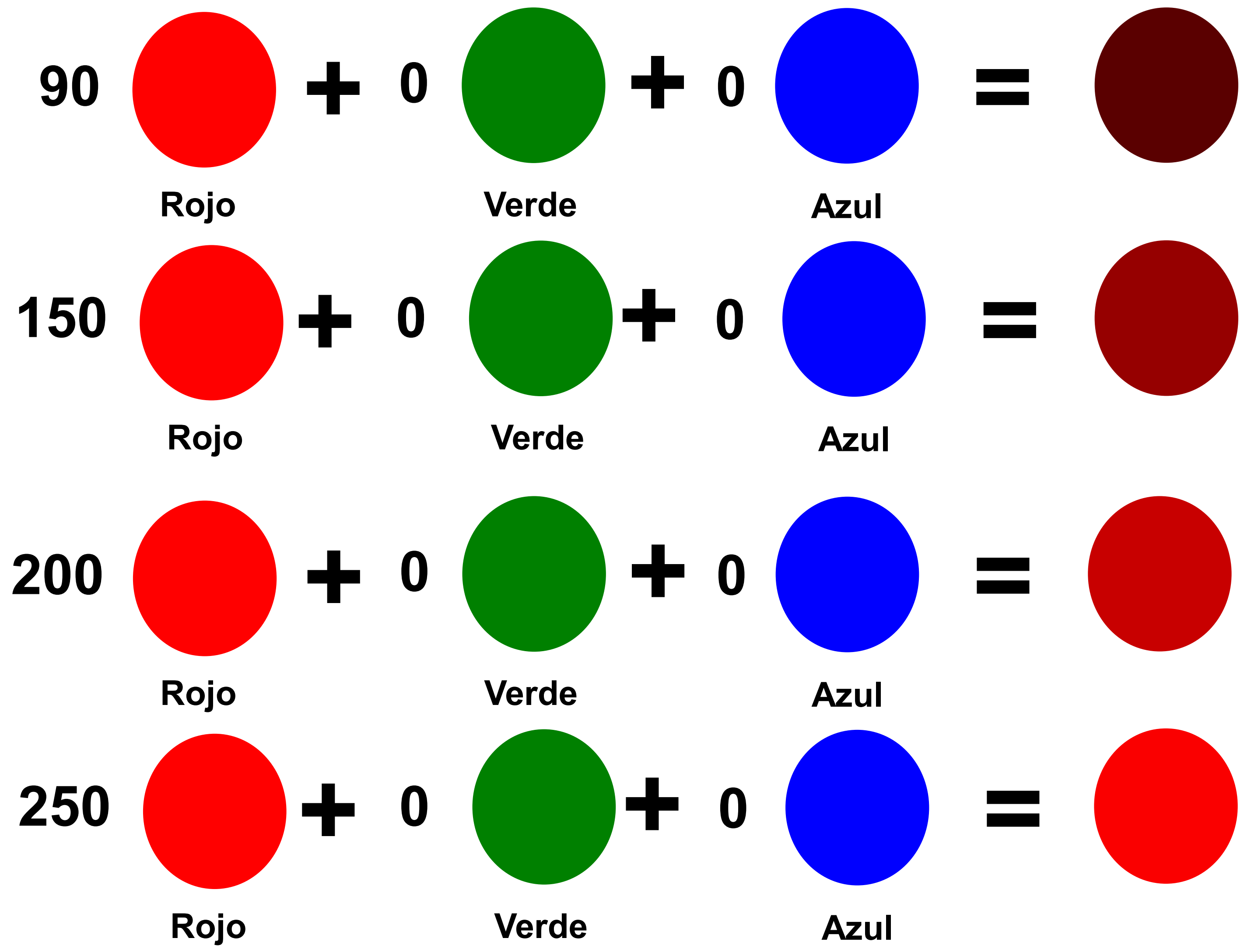


a, b, c son números

enteros del 0 al 255



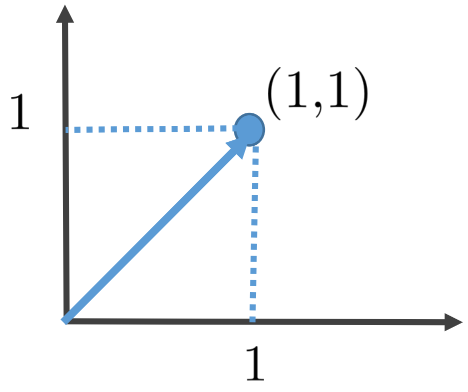
Creando Colores en la Computadora

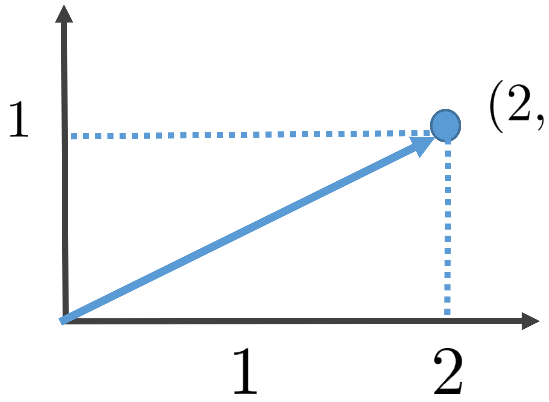


¿Cuántos colores tiene una computadora?

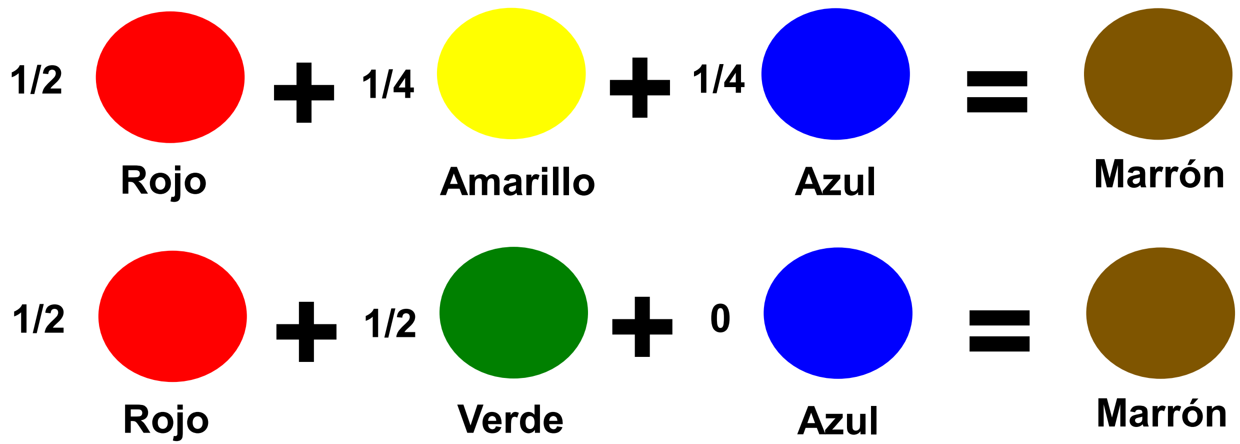
256 x 256 x 256 = 16.777.216

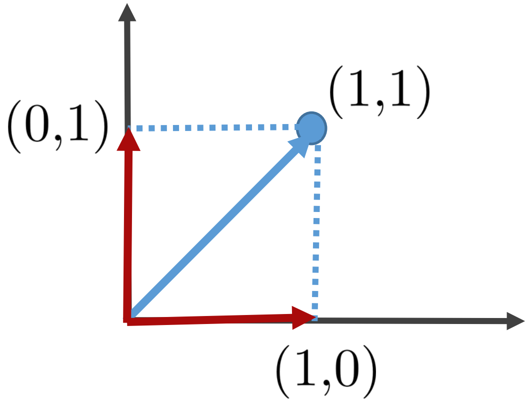
Puntos en el Plano y Vectores



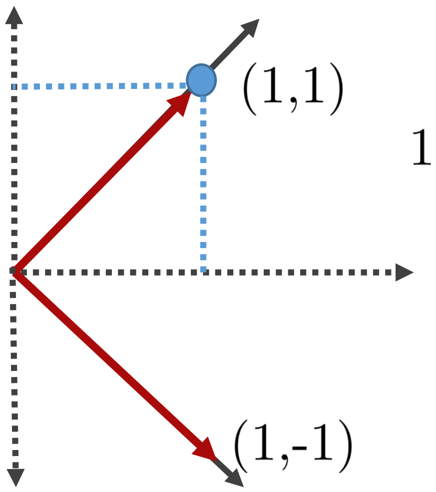


Sistema de Coordenadas





$$1\ (1,0) + 1\ (0,1) = (1,1)$$



$$1\ (1,1) + 0\ (1,-1) = (1,1)$$

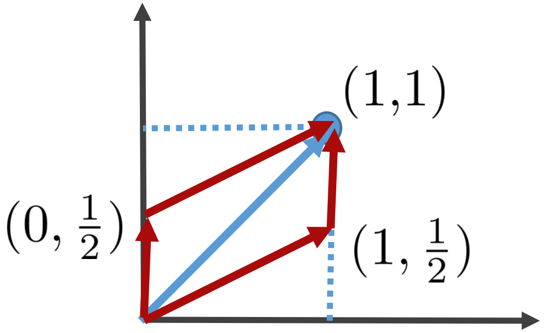
Operaciones con Vectores

Sean u y v vectores en $\mathbb{R}^n$, o sea, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

La suma de u y v es el vector obtenido sumando las componentes correspondientes de estos:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n).$$

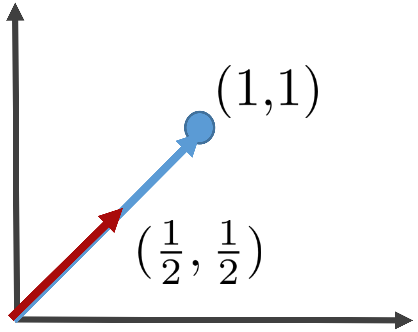
Ejemplo: $(0, \frac{1}{2}) + (1, \frac{1}{2}) = (1, 1)$



El producto de un número real k por el vector u, es el vector obtenido multiplicando cada componente de u por k:

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

Ejemplo: $\frac{1}{2}(1, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Propiedades de vectores

Para vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y escalares $k, k' \in \mathbb{R}$ tenemos que

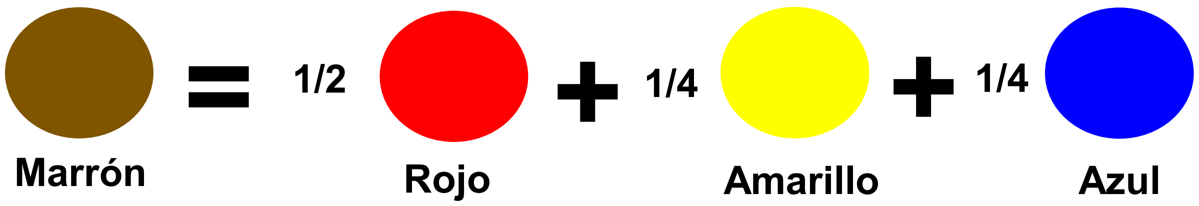
1. $(u + v) + w = u + (v + w)$
2. $u + 0 = u$
3. $u + (-u) = 0$
4. $u + v = v + u$
5. $k(u + v) = ku + kv$
6. $(k + k')u = ku + k'u$
7. $(kk')u = k(k')u$
8. $1u = u$

Combinaciones Lineales

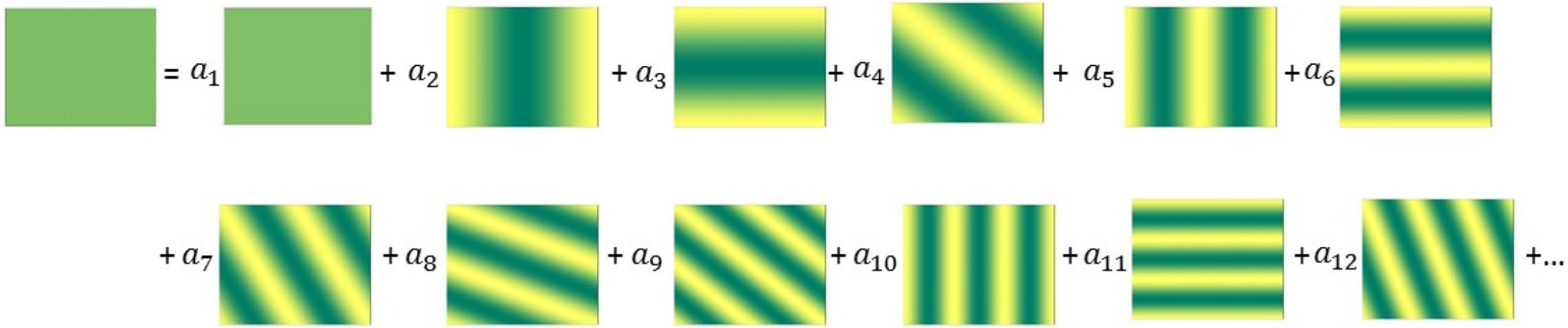
Definición: Un vector v es una *combinación lineal* de vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ si existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tales que

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_n u_n$$

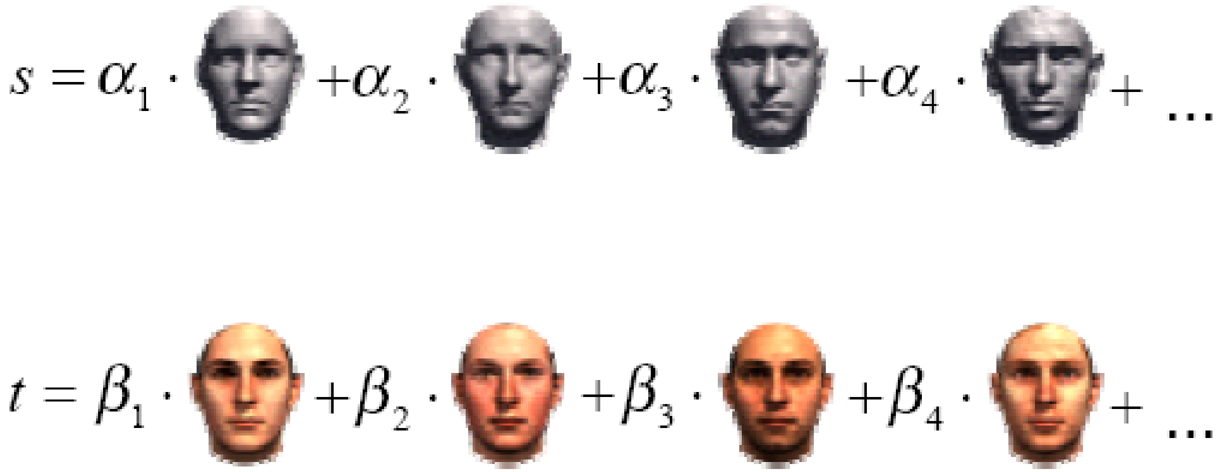
Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Combinación lineal de imágenes



Combinación lineal de imágenes de caras



Puede usarse para identificar una persona.

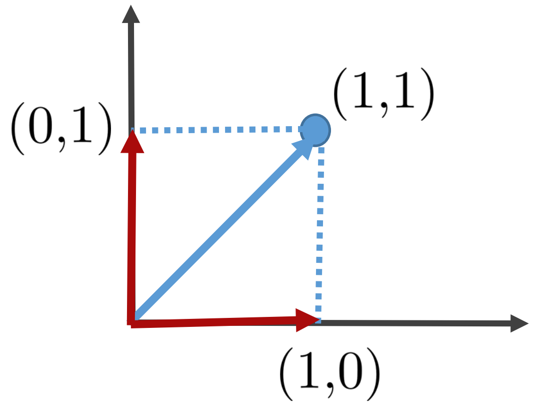
Producto Interno

Definición: Sean u y v vectores en $\mathbb{R}^n$, es decir $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. El *producto interno* de u y v está definido por

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Se dice que los vectores u y v son *ortogonales* (o perperdiculares) si su producto interno es cero, o sea que $u \cdot v = 0$.

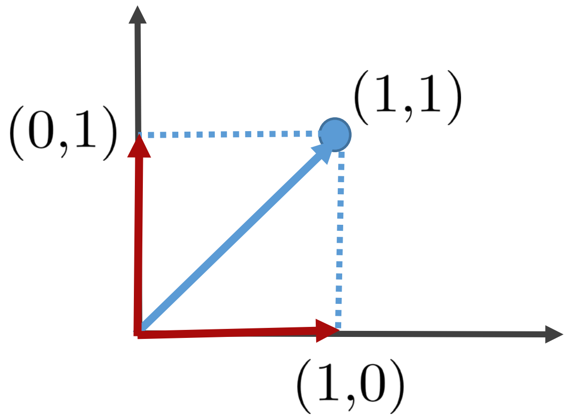
Ejemplos: $(1, 0) \cdot (0, 1) = 0$, $(1, 0) \cdot (1, 1) = 1$



Norma y Distancia

Definición: La *norma Euclidea* de un vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ se define como

$$\|x\|_2 = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$



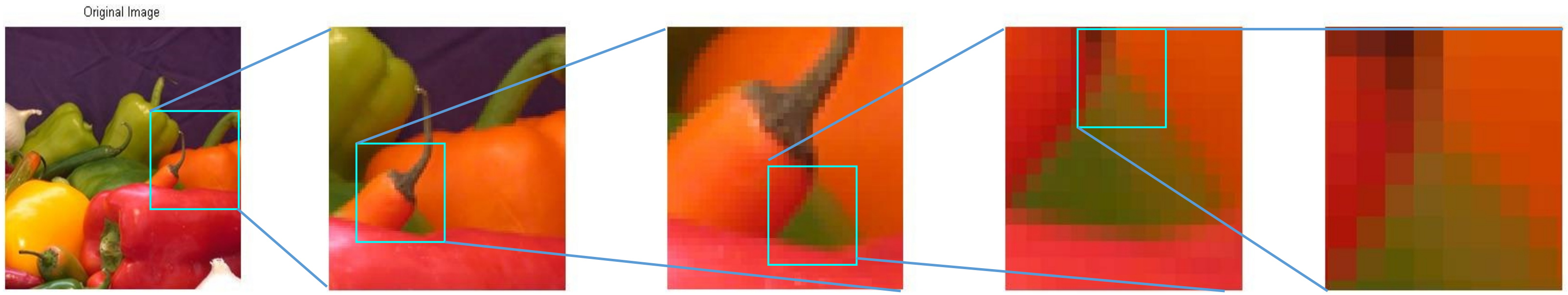
Ejemplos: $\|(1,0)\|_2 = \|(0,1)\|_2 = 1$ y $\|(1,1)\|_2 = \sqrt{2}$

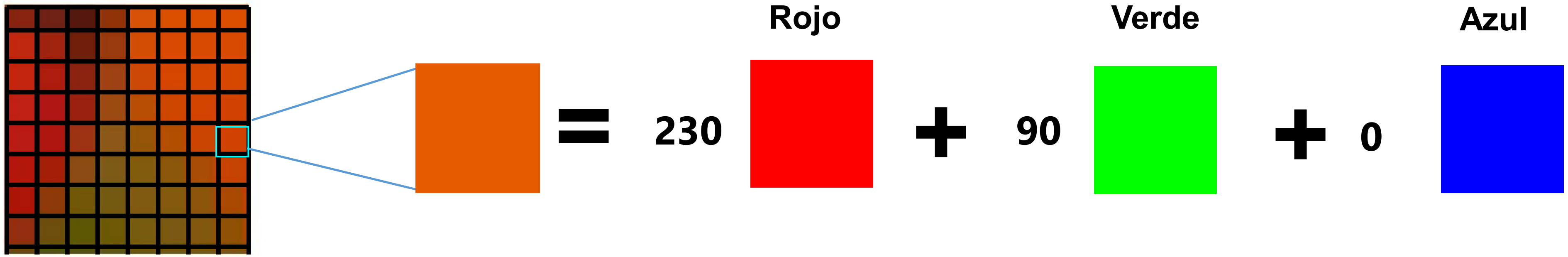
Definición: La *distancia Euclidea* entre dos vectores u y v se define como

$$d(u,v) = \|u - v\|_2 = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

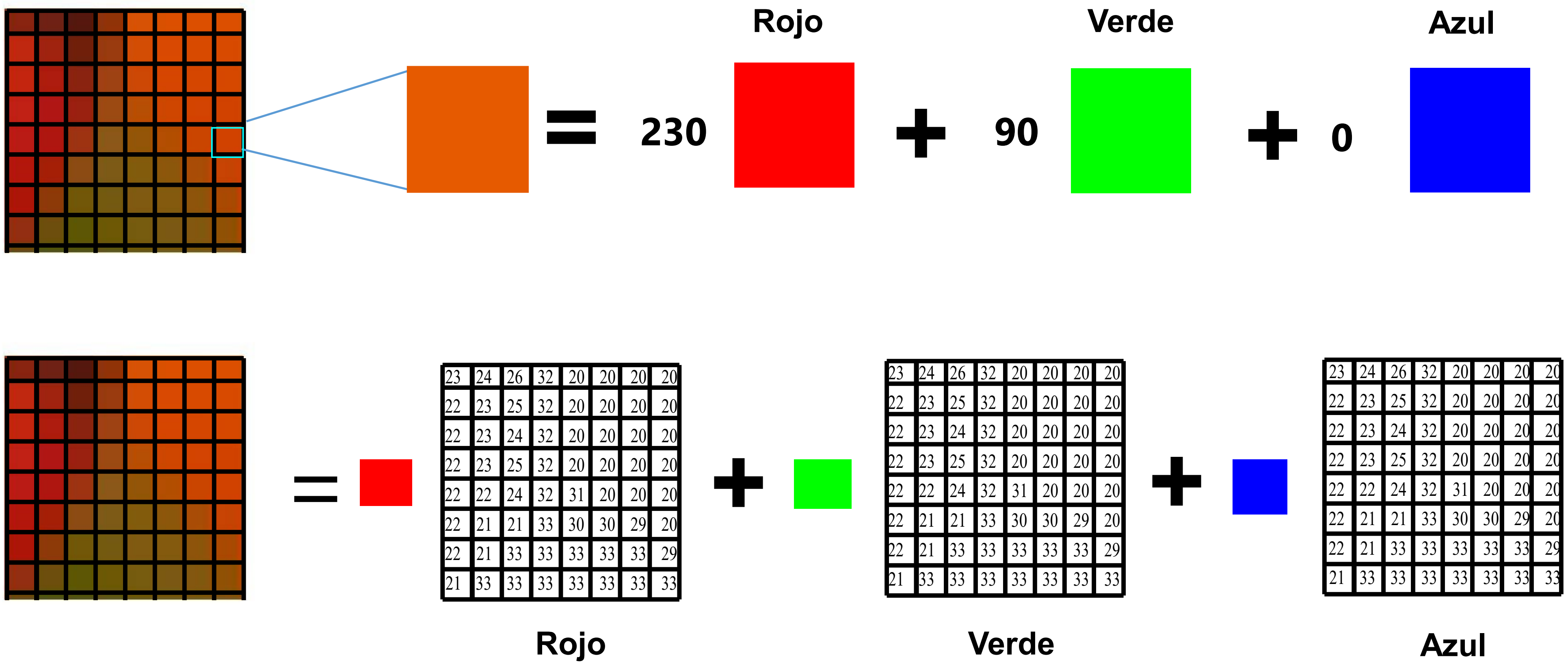
Ejemplos: $d((1,1),(1,0)) = \|(1,1) - (1,0)\|_2 = \|(0,1)\|_2 = 1$

Imágenes Digitales





Imágenes Digitales



Matrices

Definición: Una matriz es una tabla ordenada de números

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Suma de Matrices

Definición: La suma de dos matrices de igual tamaño se define como

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Producto por un escalar

Definición: El producto de un escalar k por la matriz A se define como

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Example: $2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 5 & 7 & 12 \\ 5 & 9 & 14 \end{pmatrix}$

Combinación lineal de imágenes