El problema isoperimétrico

Tatiana Toro

University of Washington

Mathematics Sin Fronteras

La desigualdad isoperimétrica

Teorema: Dada una figura plana de área A y perímetro P,

$$4\pi A \leq P^2,$$

con igualdad si y solo si la figura es un círculo.

Teorema (desigualdad de Wirtinger): Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica que es C^1 a trozos. Sea $\overline{f}$ el valor medio de f

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta.$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2\, d\theta \leq \int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2\, d\theta,$$

con igualdad si y solo si

$$f(\theta) = \overline{f} + a\cos\theta + b\sin\theta$$

para algunas constantes a, b.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica, C^1 a trozos. Los números a_n, b_n en (1) y c_n en (2) se llaman los coeficientes de Fourier de f. La serie correspondiente

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

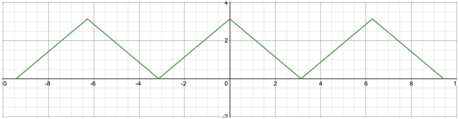
se llama la serie de Fourier de f.
Aquí,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)\cos n\zeta \, d\zeta \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)\sin n\zeta \, d\zeta \tag{1}$$

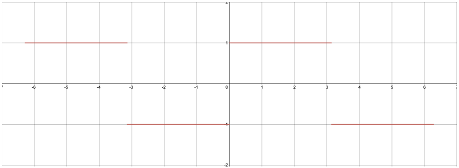
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)e^{in\zeta} \, d\zeta \tag{2}$$

Ejemplos

$$f(\theta) = \begin{cases} \pi - \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \pi + \theta & -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$



$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$



¿Converge la serie de Fourier de una función f a f?

Para $N \in \mathbb{N}$, sea

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\theta} \tag{3}$$

Teorema: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función 2π-periódica que es C^1 a trozos, y S_N^f es definida como en (3) con a_n, b_n y c_n definidos como en (1) y (2), entonces

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$$

para todo θ. En particular,

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = f(\theta)$$

para cada punto θ en el que f es continua.

Desigualdad de Wirtinger

Teorema: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica que es C^1 a trozos, y sea

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta.$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2 \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2 \, d\theta.$$

La igualdad se alcanza si y solo si

$$f(\theta) = \overline{f} + a\cos\theta + b\sin\theta$$

para algunas constantes a, b.

Demostración: Sea

$$f(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

donde $a_0 = 2\overline{f}$ y

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2 \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right]^2 d\theta \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\
f'(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin n\theta + nb_n \cos n\theta) \\
\int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2 \, d\theta &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2) \qquad \text{(identidad de Parseval)}
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2 \, d\theta - \int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2 \, d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \geq 0.
$$

Se tiene igualdad si

$$
(n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) = 0 \text{ either } n = 1 \text{ or } a_n = b_n = 0 \text{ for } n \geq 2.
$$

En este caso,

$$
f(\theta) = \overline{f} + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta. \quad \square
$$

Segunda perspectiva hacia el problema isoperimétrico

La Suma de Minkowski de dos subconjuntos A, $B \subset \mathbb{R}^n$ se define como

$$A \boxplus B := \{a + b : a \in A \text{ and } b \in B\}$$

"Warm up":

1. Encuentre $[0, 3] \times [0, 2] \boxplus [0, 2] \times [0, 1]$
2. Encuentre $A \boxplus B$, donde A es un triángulo y B un rectángulo.
3. Para un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ y $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, sea $\rho S = \{\rho x : x \in S\}$. Sean $\rho \in (0, \frac{1}{2})$, $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ y $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Encuentre $B \boxplus \rho B$ y $Q \boxplus \rho B$.
4. Encuentre área y perímetro de $B \boxplus \rho B$ y $Q \boxplus \rho B$.

Desigualdad de Steiner

Note que si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\rho \geq 0$,

$$\Omega_\rho = \Omega \boxplus \rho B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{dist}(x, \Omega) \leq \rho\}$$

Teorema: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto cerrado y acotado con borde C^1 a trozos, cuya área es A y cuyo borde tiene longitud L. Sea $\rho \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Área}(\Omega_\rho) &\leq A + L\rho + \pi\rho^2 \\ L(\partial\Omega_\rho) &\leq L + 2\pi\rho. \end{aligned}$$

Si Ω es convexo, entonces las desigualdades son igualdades.

Preguntas:

- Verifique las igualdades para un polígono convexo.
- Esboce la demostración para un conjunto convexo acotado.

Desigualdad de Brunn

Sean A y B subconjuntos medibles acotados del plano

$$\sqrt{\text{Area}(A \boxplus B)} \geq \sqrt{\text{Area}(A)} + \sqrt{\text{Area}(B)}.$$

Minkowski demostró que se tiene igualdad si y solo si $A = rB + x$ para algunos $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^2$ (i.e. A y B son figuras homotéticas).

Demostración de Hadwiger usando la desigualdad de Steiner

Dado un conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, definimos:

- inradio

$$r_I = \sup\{r \geq 0 : \text{ there is } x \in \mathbb{R}^2 \text{ such that } x \boxplus rB \subset \Omega\}$$

- incentro es cualquier x_I tal que incircle $x_I \boxplus r_I B \subset \Omega$

Desigualdad Isoperimétrica de Hadwiger Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ convexo con borde C^1 a trozos, área $\mathcal{A}$ y perímetro $\mathcal{L}$. Sea M una línea a través del incentro de Ω y sea a la longitud del segmento de M que pasa por el incentro. Entonces

$$\mathcal{L}^2 - 4\pi\mathcal{A} \geq \frac{\pi^2}{4}(a - 2r_I)^2$$