El problema isoperimétrico

Tatiana Toro

University of Washington

Mathematics Sin Fronteras

La desigualdad isoperimétrica

Teorema: Dada una figura plana de área A y perímetro P,

$$4\pi A \leq P^2,$$

con igualdad si y solo si la figura es un círculo.

Teorema (desigualdad de Wirtinger): Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica que es C^1 a trozos. Sea $\overline{f}$ el valor medio de f

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta.$$

Entonces

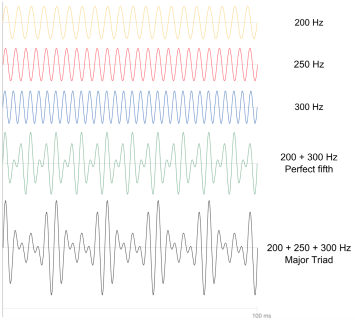
$$\int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2\, d\theta \leq \int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2\, d\theta,$$

con igualdad si y solo si

$$f(\theta) = \overline{f} + a\cos\theta + b\sin\theta$$

para algunas constantes a, b.

La idea central del análisis de Fourier es descomponer una función dada como combinación de funciones más simples. Estas últimas serán los bloques elementales. Algunos ejemplos de ellas son las funciones seno y coseno.



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d1/Major_triad.svg/1200px-Major_triad.svg.png

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica $(f(\theta + 2\pi) = f(\theta))$ que es C^1 a trozos. ¿Es posible expandir f como una serie de la forma

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \text{ ?} \tag{1}$$

Recordemos que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Así,

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \text{ y } \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i},$$

de modo que (1) puede reescribirse como

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \tag{2}$$

donde para $n \in \mathbb{N}$,

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n); \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \tag{3}$$

o equivalentemente,

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = i(c_n - c_{-n}). \tag{4}$$

Asumamos que f admite una expansión en serie de la forma (2). ¿Cómo podemos calcular c_n en términos de f?

Series de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica, C^1 a trozos. Los números a_n, b_n en (1) y c_n en (2) se llaman los coeficientes de Fourier de f. La serie correspondiente

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

se llama la serie de Fourier de f.
Aquí,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)\cos n\zeta \, d\zeta \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)\sin n\zeta \, d\zeta \tag{5}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) e^{in\zeta} \, d\zeta \tag{6}$$

Casos especiales

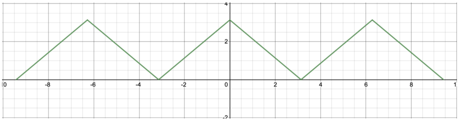
f par	$f(-\theta) = f(\theta)$	$a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$	$b_n = 0$
f impar	$f(-\theta) = -f(\theta)$	$a_n = 0$	$b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$

Encuentre las series de Fourier de las siguientes funciones:

$$f(\theta) = \begin{cases} \pi - \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \pi + \theta & -\pi \leq \theta < 0 \end{cases} \qquad f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$

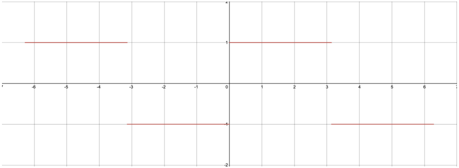
Ejemplo 1

$$f(\theta) = \begin{cases} \pi - \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \pi + \theta & -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$



Example 2

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$



¿Converge la serie de Fourier de una función f a f?

Para $N \in \mathbb{N}$, sea

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\theta} \tag{7}$$

Teorema: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función 2π-periódica que es C^1 a trozos, y S_N^f es definida como en (7) con a_n, b_n y c_n definidos como en (5) y (6), entonces

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$$

para todo θ. En particular,

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = f(\theta)$$

para cada punto θ en el que f es continua.

Desigualdad de Wirtinger

Teorema: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica que es C^1 a trozos, y sea

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta.$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2\, d\theta \leq \int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2\, d\theta.$$

La igualdad se alcanza si y solo si

$$f(\theta) = \overline{f} + a\cos\theta + b\sin\theta$$

para algunas constantes a, b.

Demostración: Sea

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

donde $a_0 = 2\overline{f}$ y

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\right]^2 d\theta \\
&= \pi \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin n\theta + nb_n \cos n\theta) \\
\int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2 \, d\theta &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2) \qquad \text{(identidad de Parseval)}
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2 \, d\theta - \int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2 \, d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \geq 0.
$$

Se tiene igualdad si

$$
(n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) = 0 \text{ either } n = 1 \text{ or } a_n = b_n = 0 \text{ for } n \geq 2
$$

En este caso,

$$
f(\theta) = \overline{f} + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta. \quad \square
$$

Segunda perspectiva hacia el problema isoperimétrico

La Suma de Minkowski de dos subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se define como

$$A \boxplus B := \{a + b : a \in A \text{ and } b \in B\}$$

"Warm up":

1. Encuentre $[0,3] \times [0,2] \boxplus [0,2] \times [0,1]$
2. Encuentre $A \boxplus B$, donde A es un triángulo y B un rectángulo.
3. Para un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ y $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, sea $\rho S = \{\rho x : x \in S\}$. Sean $\rho \in (0, \frac{1}{2})$, $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ y $Q = [0,1] \times [0,1]$. Encuentre $B \boxplus \rho B$ y $Q \boxplus \rho B$.
4. Encuentre área y perímetro de $B \boxplus \rho B$ y $Q \boxplus \rho B$.

Desigualdad de Steiner

Note que si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\rho \geq 0$,

$$\Omega_\rho = \Omega \boxplus \rho B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{dist}(x, \Omega) \leq \rho\}$$

Teorema: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto cerrado y acotado con borde C^1 a trozos, cuya área es A y cuyo borde tiene longitud L. Sea $\rho \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Área}(\Omega_\rho) &\leq A + L\rho + \pi\rho^2 \\ L(\partial\Omega_\rho) &\leq L + 2\pi\rho. \end{aligned}$$

Si Ω es convexo, entonces las desigualdades son igualdades.

Preguntas:

- Verifique las igualdades para un polígono convexo.
- Esboce la demostración para un conjunto convexo acotado.

Desigualdad de Brunn

Sean A y B subconjuntos medibles acotados del plano

$$\sqrt{\text{Area}(A \boxplus B)} \geq \sqrt{\text{Area}(A)} + \sqrt{\text{Area}(B)}.$$

Minkowski demostró que se tiene igualdad si y solo si $A = rB + x$ para algunos $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^2$ (i.e. A y B son figuras homotéticas).