El problema isoperimétrico

Tatiana Toro

University of Washington

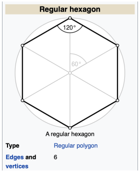
Matemáticas Sin Fronteras

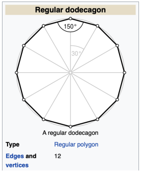
Motivación

El **problema isoperimétrico**, que data de la antigua Grecia, consiste en encontrar entre todas las figuras planas con perímetro fijo, aquella con mayor área.
El objetivo de este curso es probar que nuestra predicción es correcta. Haremos esto desde diversas perspectivas.

"Warm up":

1. De todos los rectángulos con perímetro 12, ¿cuál tiene mayor área?
2. ¿Cuál es el área de un hexágono regular de lado 2?
3. ¿Cuál es el área de un dodecágono regular de lado 1?





4. ¿Qué propiedades de polígonos con perímetro fijo parecen maximizar área?

El cociente isoperimétrico

- El cociente isoperimétrico de una figura plana dada con área A y perímetro P es
$$IQ = \frac{4\pi A}{P^2}$$
Note que para maximizar el área A de una figura plana con perímetro dado P es suficiente maximizar IQ.
- Explique por qué es equivalente a minimizar el perímetro P entre todas las figuras planas de área A.
- Calcule IQ para un círculo de área A y perímetro P.
- Encuentre una fórmula para el área de un $2m$-ágono de perímetro 12. Calcule el IQ correspondiente. ¿Qué ocurre con la fórmula cuando $m \to \infty$?
- ¿Tiene alguna conjetura sobre IQ que probaría que nuestra predicción es correcta?

La desigualdad isoperimétrica

Teorema: Dada una figura plana de área A y perímetro P,

$$4\pi A \leq P^2$$

con igualdad si y solo si la figura es un círculo (es decir, el círculo es la solución al problema isoperimétrico).

Explique por qué la figura que maximiza IQ debe ser convexa (cada segmento de línea recta que conecte dos puntos en el borde de la figura debe estar contenido en ella).

Una aplicación desde la antigüedad

Asumiendo que hemos resuelto el problema isoperimétrico, ¿qué haría si se encontrara en la situación de la Princesa Dido? La princesa Dido, hija de un rey Tirio y futura fundadora de Cártago, compró a los nativos de África del Norte un terreno a lo largo de la línea costera *no más grande que lo que un cuero de buey pudiera rodear*. Ella cortó el cuero en tiras e hizo una gran cuerda de longitud L. Entonces se enfrentó al problema geométrico de encontrar la región de mayor área encerrada por una curva, teniendo en cuenta que se le permitía usar la línea costera como parte del borde de dicha región. En el interior del continente el resultado habría sido una región circular, pero con la línea costera presente el problema era distinto.

Demostración de Hurwitz's usando la desigualdad de Wirtinger

Teorema de Green: Si p y q son funciones diferenciables en el plano y Ω es una región plana cuyo borde Γ es una curva C^1 a trozos, entonces

$$\oint_\Gamma p\,dx + q\,dy = \int\int_\Omega (q_x - p_y)\,dx\,dy.$$

Eligiendo $q = x$ y $p = 0$, el teorema de Green dice que

$$\oint_\Gamma x\,dy = \int\int_\Omega dx\,dy = \mathrm{Area}(\Omega).$$

Supongamos que la curva Γ tiene longitud L y está parametrizada por su longitud de arco. Entonces hay dos funciones L-periódicas $x, y : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ que son C^1 a trozos y satisfacen

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

Convertimos $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ en funciones 2π-periódicas:

$$f(\theta) = x\left(\frac{L\theta}{2\pi}\right), \qquad g(\theta) = y\left(\frac{L\theta}{2\pi}\right)$$

$$\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\theta}\right)^2 = (f')^2 + (g')^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \oint_\Gamma x\,dy = \\ &= \int_0^{2\pi} fg'\,d\theta = \end{aligned}$$

Desigualdad de Wirtinger

Teorema: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica (es decir, $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$) que es C^1 a trozos. Sea $\overline{f}$ el valor medio de f

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta.$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2\, d\theta \leq \int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2\, d\theta,$$

con igualdad si y solo si

$$f(\theta) = \overline{f} + a\cos\theta + b\sin\theta$$

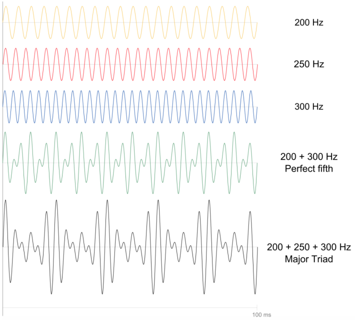
para algunas constantes a, b.

Cierre de la demostración de Hurwitz's usando la desigualdad de Wirtinger

$$\begin{aligned}
A = \mathrm{Area}(\Omega) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left([f(\theta)-\overline{f}]^2 + [g'(\theta)]^2 - [f(\theta)-\overline{f}-g'(\theta)]^2\right)\, d\theta \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left([f(\theta)-\overline{f}]^2 + [g'(\theta)]^2\right)\, d\theta \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left([f'(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2\right)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{L^2}{4\pi^2}\, d\theta = \frac{L^2}{4\pi}
\end{aligned}$$

Análisis de Fourier

La idea central del análisis de Fourier es descomponer una función dada como combinación de funciones más simples. Estas últimas serán los bloques elementales. Algunos ejemplos de ellas son las funciones seno y coseno.



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d1/Major_triad.svg/1200px-Major_triad.svg.png

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica $(f(\theta + 2\pi) = f(\theta))$ que es C^1 a trozos. ¿Es posible expandir f como una serie de la forma

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \text{ ?} \tag{1}$$

Recordemos que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Así,

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \text{ and } \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i},$$

de modo que (1) puede reescribirse como

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \tag{2}$$

donde para $n \in \mathbb{N}$,

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n); \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \tag{3}$$

o equivalentemente,

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = i(c_n - c_{-n}). \tag{4}$$

Asumamos que f admite una expansión en serie de la forma (2). ¿Cómo podemos calcular c_n en términos de f?

Series de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica, C^1 a trozos. Los números a_n, b_n en (1) y c_n en (2) se llaman los coeficientes de Fourier de f. La serie correspondiente

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

se llama la serie de Fourier de f.
Aquí

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)\cos n\zeta \, d\zeta \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta)\sin n\zeta \, d\zeta \tag{5}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) e^{in\zeta} \, d\zeta \tag{6}$$

Casos especiales

f par	$f(-\theta) = f(\theta)$	$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\cos n\theta \, d\theta$	$b_n = 0$
f impar	$f(-\theta) = -f(\theta)$	$a_n = 0$	$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$

Encuentre las series de Fourier de las siguientes funciones:

$$f(\theta) = \begin{cases} \pi - \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \pi + \theta & -\pi \leq \theta < 0 \end{cases} \qquad f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi \\ -1 & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$

¿Converge la serie de Fourier de una función f a f?

Para $N \in \mathbb{N}$, sea

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\theta} \tag{7}$$

Teorema: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función 2π-periódica que es C^1 a trozos, y S_N^f es definida como en (7) con a_n, b_n y c_n definidos como en (5) y (6), entonces

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$$

para todo θ. En particular,

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = f(\theta)$$

para cada punto θ en el que f es continua.

Desigualdad de Wirtinger

Teorema: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2π-periódica que es C^1 a trozos, y sea

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta.$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2 \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2 \, d\theta.$$

La igualdad se alcanza si y solo si

$$f(\theta) = \overline{f} + a \cos\theta + b \sin\theta$$

para algunas constantes a, b.

Demostración: Sea

$$f(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

donde $a_0 = 2\overline{f}$ y

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2 \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right]^2 d\theta \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin n\theta + nb_n \cos n\theta) \\
\int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2 \, d\theta &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \qquad \text{(Parseval's equation)}
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^{2\pi} [f'(\theta)]^2 \, d\theta - \int_0^{2\pi} [f(\theta) - \overline{f}]^2 \, d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \geq 0.
$$

Se tiene igualdad si

$$
(n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) = 0 \text{ either } n = 1 \text{ or } a_n = b_n = 0 \text{ for } n \geq 2
$$

En este caso,

$$
f(\theta) = \overline{f} + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta. \quad \square
$$